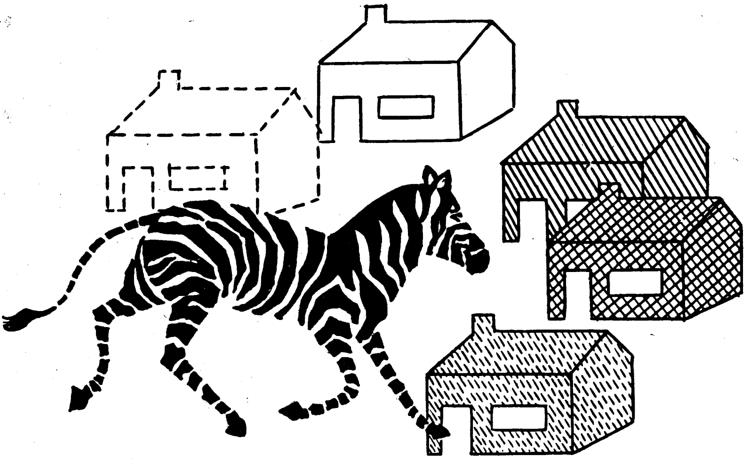


LES CASSE-TÊTE LOGIQUES DE BAILLIF

Dunod, Paris
1979

Жан-Клод Байиф

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Перевод с французского
Ю. Н. СУДАРЕВА
под редакцией
И. М. ЯГЛОМА

МОСКВА «МИР» 1983

ББК 22.12
Б18
УДК 17.22

Байиф Ж.-К.

Б18 Логические задачи: Пер. с франц./Перевод Сударева Ю. Н.; Под редакцией и с послесл И. М. Яглома.— М.: Мир, 1983.— 172 с.

Книга французского инженера Ж.-К. Байифа, продолжающая серию книг по занимательной математике, содержит более ста задач из различных разделов математики, среди которых широко представлены задачи на разрезание, разнообразные числовые головоломки, а также всевозможные логические парадоксы и парадоксы теории вероятностей.

Рассчитана на широкие круги читателей.

Б $\frac{1702020000\text{-}83}{041(01)\text{-}83}$ 166-83, ч. I

ББК 22.12
517

Редакция научно-популярной и научно-фантастической литературы

Эту книгу я посвящаю моему учителю профессору Орси, читавшему дополнительный курс в Ланьи, который привил мне любовь к математике... и математическим развлечениям

Вместо предисловия

История математических развлечений уходит своими корнями в глубины веков. В те времена, когда геометрия, арифметика и логика еще только «учились говорить», задачи серьезные и задачи забавные не были разделены между собой, как сегодня. Математика помогала решать задачи, возникавшие при разделе земли, в торговле, при дележе имущества и т. д.,— и неизбежно должно было случиться так, что наиболее трудные из этих задач дошли до нас в виде разного рода головоломок.

Подобные головоломки, например парадокс об Ахилле и черепахе, бессчетное множество раз возникали под рубрикой «Занимательная математика». 2500 лет назад древнегреческий математик Зенон сформулировал этот парадокс, в котором была поставлена серьезная проблема, потребовавшая более двух тысячелетий для своего решения.

В мрачные времена средневековья *геометры* (в том смысле, какой эпоха вкладывала в это название) проводили свои исследования в глубокой тайне и как вызов посылали своим собратьям и соперникам наилучшие из найденных теорем, не сообщая их доказательств. Средневековые математики предавались своим занятиям со страстью, их не терзали мысли о том, что, быть может, будущим поколениям их результаты покажутся недостойными внимания.

Да и могла разве существовать математика занимательная, страстная и любая другая, которая не была бы *математикой*?

Многие школьники увлекаются математикой. Правда, строгость математических формулировок, практическая польза, получаемая от решения задачи, постоянная мысль о том, как бы успешно сдать экзамен,— все это скрывает «занимательный» характер математики, и далеко не все учащиеся способны его оценить. Но какой бы ни была математика — серьезной или занимательной,— насколько богат и разнообразен ее мир!

В отличие от физики, которая призвана описывать реально существующий мир, область математики — это мир абстракций, связь которых с реальным миром менее непосредственна.

Цель математических развлечений более скромна — она заключается в том, чтобы дать пищу любознательному уму, предлагая задачи доступного уровня сложности, но в форме, которая часто сбивает решающего с толку.

Как правило, такие задачи менее трудны, чем кажется на первый взгляд, но для их решения необходима известная изобретательность.

Принято считать, что занимательная математика требует иного склада ума, чем те задачи, которые предлагаются учащимся на экзаменах. Если условие задачи кажется неясным, то следует в него вдуматься. Если задача представляется неразрешимой, то нужно мобилизовать воображение и интуицию, чтобы нащупать путь к ее решению. Наконец, если кажется, что до решения можно добраться лишь ценой сложных вычислений, то необходимо попытаться найти способ избежать утомительных выкладок.

Настоящая книга состоит из нескольких глав, посвященных разным темам. Существенная часть книги посвящена задачам на разрезание многоугольников и преобразование их в квадраты; сборник включает также большое количество задач на взвешивание, требующих отыскать среди множества одинаковых с виду монет отличную от других по весу Эти два типа задач представлены здесь в виде серий задач нарастающей трудности.

Две главы книги посвящены логическим парадоксам (в частности, знаменитому «парадоксу повешенного»), вероятностным парадоксам, а также стратегии игр, подобных игре в рулетку.

В книге имеются также задачи совершенно иного рода, не связанные с вышеназванными типами задач. Это дало нам повод указать в Приложениях методы вычисления дней недели, сокращенного умножения, извлечения корней пятой степени из чисел и другие упражнения, столь излюбленные фокусниками.

ЗАДАЧИ

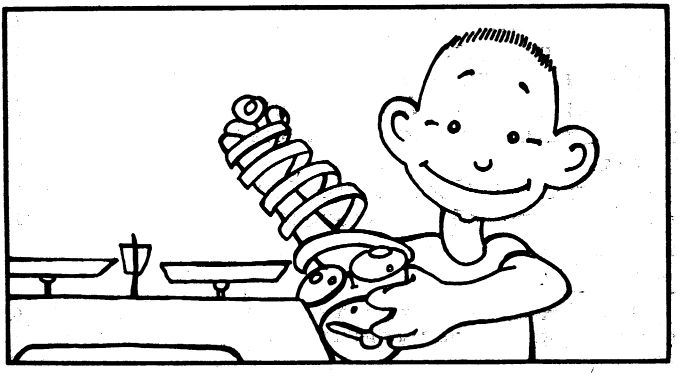
1. Пружина от будильника, пастух и бараны, любопытный профессор и другие задачи

Будильник сломан. Время остановилось. Жанно играет на чердаке в окружении семейных «реликвий» — старых вешалок, вышедших из моды шляп, пожелтевших книг, множества других странных предметов и паутины, освещенной лучами солнца, которые пробиваются сквозь черепичную крышу. Попытаемся же проникнуть в мир Жанно, где пастухи стерегут барашков, где одни люди играют в шары, другие — в карты, а третьи справляют свои дни рождения.

1. ПРУЖИНА ОТ БУДИЛЬНИКА

Жанно забавляется чашечными весами; при этом он замечает, что весы оказываются в равновесии, если на одну их чашу положить гирю в 200 г, а на другую — два одинаковых ключа, две одинаковые монеты и трех одинаковых солдатиков или же яблоко, одного солдатика и абрикос.

Монета, ключ, солдатик и груша вместе весят 50 г Абрикос, яблоко и груша вместе весят столько же,



сколько монета, ключ, солдатик и пружина от будильника. Сколько весит пружина от будильника?

2. ПАРТИЯ В ПОКЕР

Перед началом партии в покер все деньги, которые были у Поля, плюс сумма, вдвое большая той, что имелась у Андре и Бернара, равнялись удвоенному «состоянию» Клода плюс утроенное «состояние» Жана плюс еще 300 франков.

Если бы Андре имел на 1500 франков больше, то у него оказалось бы денег столько же, сколько у Жана и Бернара плюс удвоенное «состояние» Поля.

Если бы у Клода было на 1100 франков больше, то он располагал бы такой же суммой, как и четверо остальных игроков, вместе взятых.

Если сложить утроенное «состояние» Андре, учетверенное «состояние» Жана и прибавить еще 1200 франков, то мы получим утроенное «состояние» Бернара и Поля.

Сколько денег было у Жана и Поля вместе?

3. БЛИЗНЕЦЫ [1]

Месье и мадам Мартен и две их дочери проводят отпуск вместе с месье и мадам Дюпон и двумя их сыновьями-близнецами.

Как-то Пьер, один из близнецов, заметил, что суммарный возраст четырех человек, играющих в шары, равен суммарному возрасту четырех остальных, которые играют в карты.

Месье Дюпон на четыре года старше своей жены, которая на десять лет старше мадам Мартен. Близнецы на два года старше, чем старшая из дочерей Мартенов, и на четыре года старше младшей из Мартенов. Месье Мартен на шесть лет старше своей жены, которая втрое старше своей младшей дочери.

Играют ли Пьер и его брат в одну игру, если известно, что общий возраст всех восьми человек кратен 31?

---

[1] Во всех задачах настоящей книги, касающихся возраста, ответ должен выражаться целым числом лет.

4. РАЗДЕЛ ПОЛЯ

Жан и Жак получили в наследство участки земли площадью в 114 и 81 га (1 га$=10^4$ м^2). Доля Жана представляла собой два квадратных участка равной площади со стороной, кратной 100 м.

Но едва Жан успел заказать ограду для этих двух участков, как было принято новое решение, и он получил единственный прямоугольный участок, длина которого была на 20 м больше ширины, а площадь равнялась общей площади прежних двух участков.

Оказалось, что оградой, заказанной Жаном, можно было обнести не только его новый участок, но и четыре прямолинейные стороны участка, принадлежащего Жаку.

Какую форму имел участок Жака?

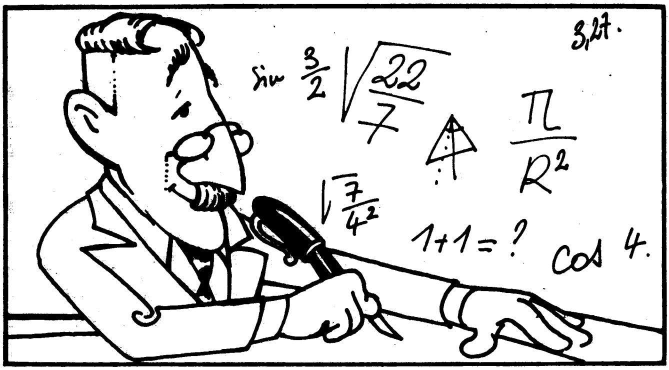
5. ВОЗРАСТ ПАСТУХА

Пастух заметил, что произведение числа его баранов на число его баранов, уменьшенное на единицу, ровно на 15 больше, чем произведение его собственного возраста на число его баранов, уменьшенное на 2.

Сколько лет пастуху?

6. ЧИСЛО ИЗ ДЕСЯТИ ЦИФР

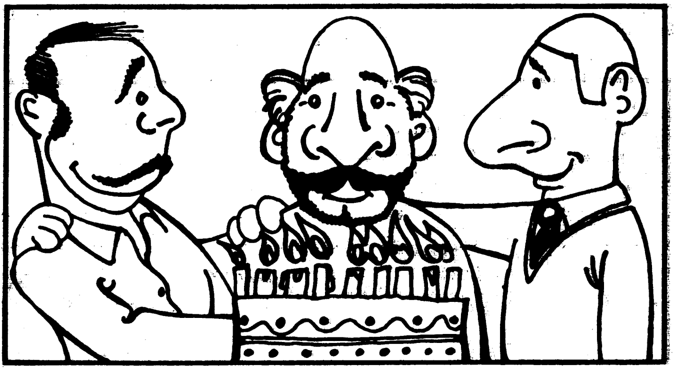
Существует ли число из десяти различных цифр, которое после умножения на 2 дало бы другое число, также состоящее из десяти различных цифр?



7. СТРАННЫЙ УЧИТЕЛЬ

Чтобы оценить успехи своих учеников, учитель использует весьма любопытную систему оценок. Он начинает всегда с одного и того же числа, которое на 2 отличается от числа, кратного 11, затем он делит это число на число хорошо работающих учеников и получает оценку, которую выставляет каждому из этих учеников. Выведенная таким образом оценка может оказаться бо́льше 20[1]. (О том, как оценивалась работа остальных учеников, нам ничего не известно.)

Как-то в конце очередной недели хорошо работавших учеников оказалось на два человека меньше,



[1] Во французских лицеях принята 20-балльная система оценок, при которой наивысшей отметкой является 20.— *Прим. ред.*

чем в предыдущую неделю. В результате оценка возросла на 4.

В следующий раз хорошо работали все ученики, и оценка равнялась целому числу, которое было вдвое меньше предыдущего. Сколько же в классе учеников?

8. ДНИ РОЖДЕНИЯ

Однажды летом три человека отмечали вместе свои дни рождения: это было возможно, так как родились они в один и тот же день, но в разные годы. Заметим, что родились они в разные дни недели — это были три последовательных дня недели.

В какой день недели праздновал свой первый Новый год самый пожилой из них, если известно, что 1 января 1969 г. произведение возрастов всех троих равнялось 70 840?

Примечание. Для решения этой задачи можно использовать разные методы. В Приложении I мы приводим метод, пользуясь которым фокусники мгновенно определяют, какой именно день недели соответствует любой заданной дате. Этот метод удобно использовать и при решении данной задачи.

2. Разрезания. Преобразование прямоугольника и параллелограмма в квадрат

Многие книги по занимательной математике содержат задачи на разрезание многоугольников. Происхождение этих задач, вероятно, имеет под собой различную основу. Это и разрезание куска кожи или ткани с наименьшими потерями, причем таким образом, чтобы готовое изделие имело как можно меньше швов. Это архитектурные задачи, в которых какие-то детали заданного размера требуется разместить внутри определенного сооружения. И наконец, чисто геометрические исследования.

Именно в процессе таких исследований и возникло доказательство теоремы Пифагора, которое изображено на рис. 1.

Внутри квадрата со стороной, равной $a+b$, помещены четыре одинаковых прямоугольных треугольника со сторонами, равными соответственно a, b и c.

Размещая эти четыре треугольника двумя разными способами, можно показать, что разность площадей большого квадрата и этих треугольников, с одной стороны, равна c^2, а с другой — (a^2+b^2), так что

$$a^2+b^2=c^2.$$

Однако доказательствами такого типа следует пользоваться с известной осторожностью.

Следующий классический пример размещений четырех многоугольников показывает, что сумма их

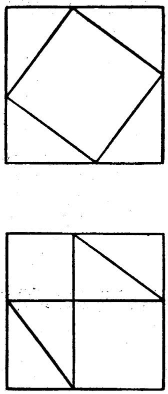


Рис 1

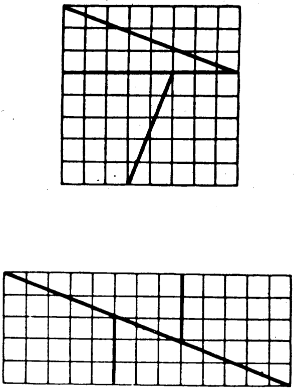


Рис 2

площадей равняется, с одной стороны, $8\times8=64$, а с другой — $13\times5=65$ (рис. 2).

Как ставятся задачи на разрезание? Далее мы увидим, что любой многоугольник, выпуклый или невыпуклый, можно преобразовать в любой другой равновеликий (т. е. имеющий равную площадь) многоугольник с помощью конечного числа разрезаний.

Упростим постановку вопроса. Возьмем прямоугольник любой формы и найдем, сколько разумно выбранных разрезов ножницами (разумеется, по прямым линиям) нам потребуется сделать, чтобы преобразовать его в квадрат, равновеликий заданному прямоугольнику.

ЗАДАЧА 1

Для начала возьмем прямоугольник со сторонами, которые относятся как 2:1 (рис. 3). В этом случае требуемое преобразование можно осуществить с помощью двух разрезов ножницами.

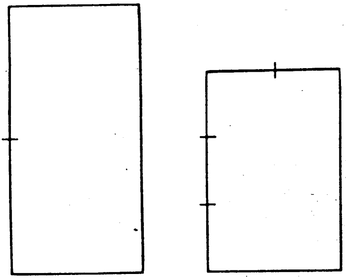


Рис 3

ЗАДАЧА 2

Несколько сложнее задача о разрезании прямоугольника размером 3×2 (рис. 3). Но и здесь достаточно двух разрезов ножницами.

ЗАДАЧИ 3, 4 и 5

Решая задачу 2, мы убедились, что при разрезании на три части предельным является случай прямоугольника размером 2×1 (см. решение задачи 2). Попы-

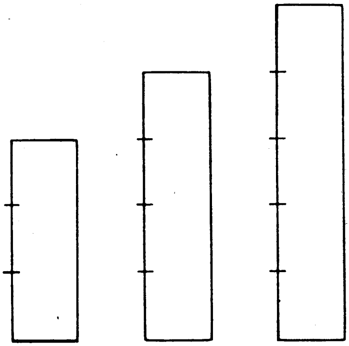


Рис 4

таемся теперь найти способы разрезания на части, из которых можно было бы сложить равновеликие квадраты, прямоугольников размерами 3×1 (рис. 4) — это задача 3, 4×1 (задача 4) и 5×1 (задача 5).

ЗАДАЧА 6

В задачах на разрезание всегда следует искать решение, при котором исходная фигура разрезается на наименьшее возможное число частей; однако такое решение может оказаться не единственным.

Вернемся вновь к примеру первого прямоугольника размером 3×1, изображенного на рис. 4.

Можно ли найти другой способ разрезания на четыре части, при котором разрезы проходили бы через одну из вершин прямоугольника и середину одной из его больших сторон?

Примечание. Это решение окажется нам полезным при разрезании треугольника.

ЗАДАЧА 7

Теперь рассмотрим особый случай разрезания прямоугольника. Можно ли прямоугольник размером 9×4 (рис. 5) преобразовать в квадрат, разрезав его только на две части?

Мы разобрали несколько случаев преобразования прямоугольников в квадраты. Обозначив длину

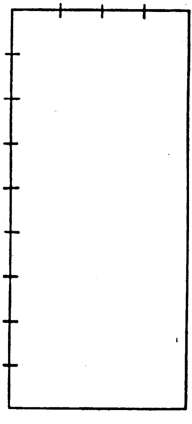


Рис 5

прямоугольника через a, а ширину через h, можно заметить, что во всех случаях рассматривались прямоугольники, у которых

$$a/2 \leqslant h < a \text{ или } a/5 \leqslant h < a/2.$$

Построения того же типа возможны и в том случае, когда длина прямоугольника превосходит его пятикратную ширину.

Обратимся теперь к разрезанию параллелограммов.

ЗАДАЧИ 8, 9

Можно ли преобразовать в квадрат каждый из параллелограммов, изображенных на рис. 6, разрезав его менее чем на четыре части?

После того как мы уже исследовали способы разрезания прямоугольников, эту задачу решить нетрудно.

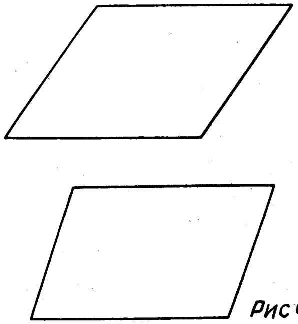


Рис 6

ЗАДАЧИ 10, 11

Можно ли преобразовать в равновеликие квадраты параллелограммы, изображенные на рис. 7, разрезав их не более чем на четыре части?

ЗАДАЧА 12

Первый из параллелограммов на рис. 6 и второй параллелограмм на рис. 7 имеют некоторую особенность, что обнаруживается при решении предыдущих задач.

Если зафиксировать вершины B и C и строить все параллелограммы этого типа, обладающие той же

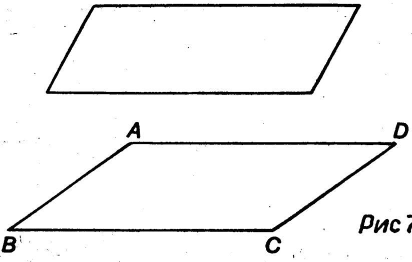


Рис 7

особенностью, то какую фигуру опишут вершины A параллелограммов, если высота h параллелограмма изменяется?

ЗАДАЧА 13

В задачах 3, 5 и 6 было ясно показано, что если мы хотим преобразовать прямоугольник в квадрат в случае, когда $a > 2h$, то его следует разрезать на четыре части. (Правда, задачи 4 и 7 несколько поколебали нашу уверенность в этом, поскольку там мы смогли преобразовать прямоугольник в квадрат, разрезав его лишь на две части.)

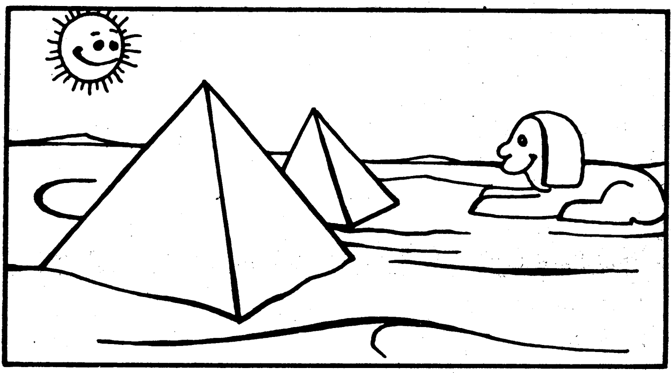
Возьмем теперь прямоугольник 4×10 Обычно в оптимальном случае прямоугольник разрезается на четыре части.

Вы уверены в этом? Другими словами, можно ли решить задачу, разрезав данный прямоугольник на три части?

Если это удастся, то можно ли обобщить найденное решение?

3. Тайны Великой пирамиды, испарение воды и игра в шары

Мир Жанно постепенно усложняется. На школьном дворе его приятели играют в шары и никак не могут свести счеты друг с другом. Когда его бабушка соби-



рается купаться в ванне, она поступает не так как принято ныне, а действует по старинке. При этом ей приходится проявить известную настойчивость и сообразительность: как только ванна наполнится, нужно поторопиться, иначе вода может успеть испариться или уйти в сток в ванне.

А чем занят Жанно этим вечером? Готовится ли он к контрольной по арифметике или воображает себя исследователем, который стремится постичь тайны Великой пирамиды?

1. ТАЙНЫ ВЕЛИКОЙ ПИРАМИДЫ

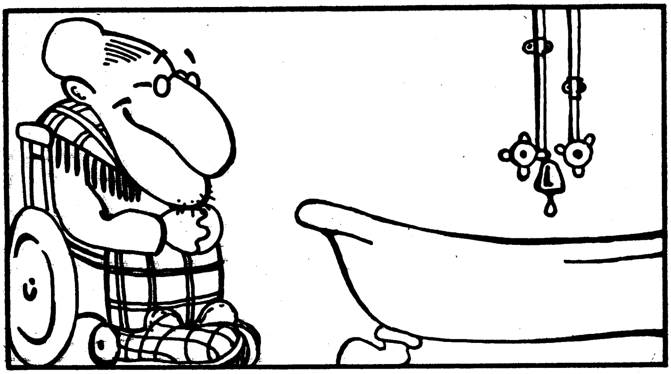
Потайной зал Великой пирамиды имеет форму квадрата и весь его пол покрыт небольшими квадратными керамическими плитками.

Из таких же керамических плиток составлены 77 одинаковых квадратных участков стен. При этом общее число плиток, покрывающих эти 77 участков стен, лишь на единицу отличается от числа плиток, устилающих пол.

Каковы размеры каждого из 77 участков стен, если сторона каждой плитки равна 2,5 см?

2. ПАРТИЯ В ШАРЫ

В конце партии в шары у Мишеля с братом было 30 шаров, у Жака с братом — на 19 шаров больше, чем у Даниэля, у Жака и Даниэля — на 7



шаров больше, чем у Мишеля, а у брата Мишеля — на четыре шара меньше, чем у брата Жака.

В начале партии у Даниэля было 11 шаров, а у брата Жака — 7. Общее число шаров у всех игроков было меньше 45.

Кто из участников игры проиграл [1]?

3. КУПАНИЕ БАБУШКИ

Ванну можно наполнить горячей водой за 3 ч 30 мин и холодной водой из другого крана — за 3 ч. Если ванна полна, то 1 л воды испаряется за полчаса. С другой стороны, пробка, закрывающая отверстие для стока воды, недостаточно плотно прилегает к стенкам отверстия, и через закрытый пробкой сток ванна опорожняется за 26 ч 15 мин.

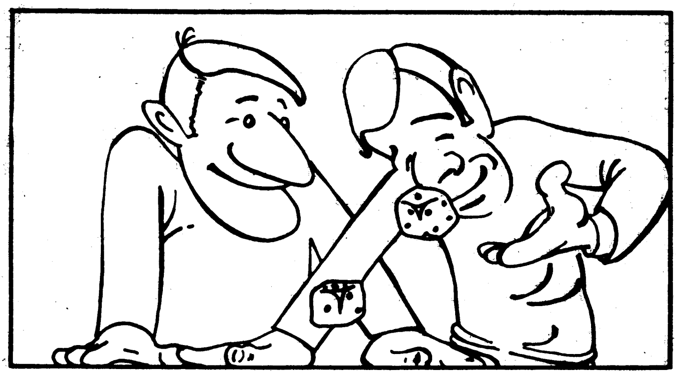
Наконец, когда открыты оба крана и вода достигает некоторого предельного верхнего уровня, излишек воды выливается через дополнительный сток со скоростью 2 л/мин, так что уровень воды фактически не изменяется.

Какова вместимость ванны?

4—7. ЧЕТЫРЕ ЗАДАЧИ ОБ ИГРЕ В КОСТИ

Жан и Клод играют в кости. Цель игры состоит в том, чтобы набрать наибольшее возможное число очков.

[1] При решении задачи нам неважно знать точные условия игры, в процессе которой шары переходят от одного игрока к другому; важно лишь то, что выигравшим считается игрок, увеличивший в ходе игры число своих шаров, а проигравшим — игрок, потерявший часть своих шаров.— *Прим. ред.*



Игроки по очереди бросают кость. Если выпадает 1, то игрок, ничего не добавляя к сумме своих очков, передает кость противнику. Если же выпадает 2, 3, 4, 5 или 6, игрок может поступить двояко:

1) прибавить набранное им число очков к общей сумме, прекратив при этом серию бросаний и передав кость противнику;

2) продолжая игру, вновь бросить кость.

Таким образом, игрок может бросать кость много раз подряд, пока либо не выпадет 1 (что полностью аннулирует результаты данной серии бросаний и вынуждает игрока передать кость противнику, так и не приписав себе ни единого очка), либо игрок сам не решит остановиться (в таком случае он добавляет к своим очкам сумму всех очков, набранных в данной серии бросаний). Например, в данной серии бросаний у игрока выпали следующие очки: 2, 4, 5, 3, 6, а затем 1. В этом случае он ничего не добавляет к своим очкам. Если же у него выпало 6, 3, 5, 4, 6 и 2 и он решил остановиться, то он добавляет к ранее набранной сумме очков еще 26.

Во время очередной серии бросаний игрок каждый раз колеблется, выбирая одну из стратегий: вновь бросить кость, чтобы увеличить сумму своих очков (при этом он рискует получить 1 и потерять все), или не искушать судьбу и остановиться, приписав себе уже набранную сумму очков.

4. Какие стратегии может выбрать игрок?

5. Стратегия состоит в том, чтобы играть до тех пор, пока игроком не наберется (или не превысится) некоторая заранее определенная сумма очков. Как вы думаете, на каком числе игрок должен остановиться?

6. Игрок решает в каждой серии бросаний бросать кость определенное число раз. Какое число бросаний вы посоветуете ему избрать?

7. Какая из двух предыдущих стратегий лучше?

8. КОНТРОЛЬНАЯ ПО АРИФМЕТИКЕ

Контрольная по арифметике состояла из четырех задач, причем правильный ответ на каждую из них оценивался в пять баллов. В одной из задач требовалось найти площадь полной поверхности куба, ребро которого равно целому числу метров.

Ответы учеников на все четыре задачи приведены в следующей таблице (искомая поверхность выражена в $м^2$):

Задачи	1	2	3	4
Жанно	8	16	12	16
Жак	12	16	12	18
Роже	12	18	12	18
Рене	16	18	12	20
Поль	8	16	10	16
Пьер	12	12	12	21
Клод	16	18	12	21
Мишель	8	16	10	16
Марсель	16	12	12	20
Морис	20	12	12	20

Предположим, что только один из учеников получил нулевую оценку. А кто получил наивысшую оценку?

9. ТАИНСТВЕННОЕ ЧИСЛО

Попытайтесь найти число, заключенное между 700 и 800, квадрат которого оканчивается на 71.

Примечание. В Приложении II указан метод, позволяющий сразу выписывать результат умножения многозначных чисел без обычной записи «столбика» промежуточных результатов.

Использование этого метода поможет вам найти простое решение данной задачи.

4. Взвешивание монет

Во всех задачах с монетами предлагается некоторое число одинаковых с виду монет. Одна или несколько из них отличаются по весу от остальных. Разумеется, разность в весе слишком мала, чтобы ее возможно было обнаружить, просто взяв монету в руку. Поэтому мы предлагаем воспользоваться чашечными весами, которые позволяют сравнивать вес различных монет. Однако гирь у нас нет, так что мы не имеем возможности взвешивать каждую монету в отдельности.

Как же следует поступить, чтобы определить самую тяжелую или самую легкую монету? Вероятно, большинство людей просто стало бы сравнивать попарно вес монет, пока не обнаружится монета, отличная по вёсу от остальных.

Но Жанно, орудуя на своем солнечном чердаке со старыми весами, не собирается торопиться — он хочет отыскать способ, позволяющий определить нужную монету с помощью **минимального числа взвешиваний.**

ЗАДАЧА 1

Имеется 21 монета, одна из которых несколько тяжелее других, однако с виду они все одинаковы. Какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь потребуется произвести, чтобы определить эту тяжелую монету?

ЗАДАЧА 2

Имеется 200 одинаковых по виду монет, одна из которых тяжелее остальных. За сколько взвешиваний можно определить эту самую тяжелую монету?

ЗАДАЧА 3

Теперь рассмотрим более общую задачу Имеется n одинаковых с виду монет, одна из которых тяжелее остальных. Какое число взвешиваний нам придется произвести, чтобы отыскать эту монету?

ЗАДАЧА 4

Имеется 8 одинаковых с виду монет На каждую чашу весов кладут по четыре монеты. Одна чаша весов перевешивает, ибо одна из монет отличается по весу от остальных семи. С помощью какого числа дополнительных взвешиваний можно обнаружить монету, отличную по весу от других?

ЗАДАЧА 5

Имеется 9 одинаковых с виду монет, одна из которых отличается по весу от остальных восьми. Как и с помощью какого числа взвешиваний можно найти эту монету, пользуясь чашечными весами без гирь?

ЗАДАЧА 6

На каждую чашу весов кладут по 40 одинаковых с виду монет. Одна чаша весов перетягивает, так как одна из монет отличается по весу от остальных 79. Можно ли обнаружить эту монету с помощью четырех дополнительных взвешиваний?

ЗАДАЧА 7

Месье Мартен имеет 15 одинаковых с виду монет, одна из которых по весу отличается от остальных четырнадцати. При этом на одной из этих 14 монет «нормального» веса имеется царапина, позволяющая ее опознать.

Месье Мартен предложил трем своим друзьям следующую задачу: как найти отличающуюся по весу монету с помощью чашечных весов не более чем за три взвешивания? После пятиминутного размышления один из трех друзей, месье Бертран, видный математик, показал месье Мартену, что эта задача неразрешима.

Как рассуждал месье Бертран?

ЗАДАЧА 8

Несмотря на аргументы месье Бертрана, месье Мартен настаивал, что отыскать монету, отличную по весу от других, всегда возможно с помощью только трех взвешиваний. Кто же прав — месье Бертран или месье Мартен? Если прав месье Мартен, то как отыскать монету, отличную по весу от других, с помощью только трех взвешиваний?

Какую ошибку допустил в своих рассуждениях месье Бертран?

ЗАДАЧА 9

Имеются чашечные весы и некоторое количество одинаковых с виду монет, одна из которых отличается по весу от остальных. При каком наибольшем возможном количестве рассматриваемых монет отличную по весу от других монету можно найти не более чем за четыре взвешивания?

ЗАДАЧА 10

Имеется 200 монет одинакового внешнего вида, одна из которых отличается по весу от остальных Какова вероятность, что нам удастся не более чем за пять взвешиваний найти эту монету и определить, тяжелее она или легче остальных?

ЗАДАЧА 11

После всех этих подготовительных операций мы можем попытаться решить интересующую нас задачу в общем виде.

Имеется x_n монет одинакового внешнего вида, одна из которых отличается по весу от остальных. Далее, как и в задаче 7, одна из «дополнительных» монет, одинаковых по весу с x_n-1 «стандартными» монетами, слегка поцарапана.

Чему должно равняться x_n, чтобы

можно было обнаружить отличную по весу монету среди наших x_n монет не более чем за n взвешиваний и при этом нельзя было бы ее обнаружить среди $x_n + 1$ монет не более чем за n взвешиваний, т. е. в некоторых случаях определить искомую монету из $x_n + 1$ «подозрительных» монет можно было бы лишь с помощью $(n + 1)$-го взвешивания?

В качестве дополнительного условия потребуем, чтобы при первом взвешивании на две чаши весов были положены все монеты.

ЗАДАЧА 12

Имеется y_n одинаковых с виду монет, одна из которых отлична по весу от остальных. Кроме того, имеется еще одна, заведомо нормальная по весу монета, которую мы можем считать поцарапанной (если хотите, считайте, что мы поцарапали ее нарочно).

Чему должно быть равно y_n, чтобы отличную по весу монету с помощью не более n взвешиваний можно было обнаружить среди y_n монет и нельзя среди $y_n + 1$ монет? Эта задача в основном совпадает с предыдущей: единственное различие состоит в том, что теперь уже не требуется при первом взвешивании обязательно помещать на весы все «сомнительные» монеты.

Впрочем, в качестве дополнительного условия здесь можно поставить требование определить, легче или тяжелее остальных искомая «особая» монета.

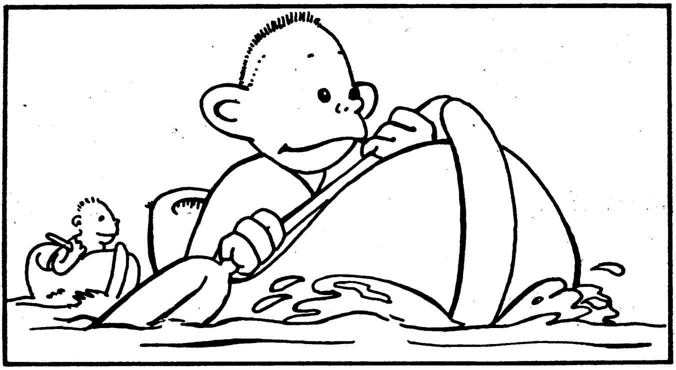
ЗАДАЧА 13

Имеется n одинаковых по внешнему виду монет, одна из которых отлична по весу от остальных.

За сколько взвешиваний можно отыскать эту монету и определить, легче она или тяжелее остальных? Отличие этой задачи от предыдущих заключается в том, что теперь в нашем распоряжении нет заведомо стандартной (помеченной или поцарапанной) монеты.

ЗАДАЧА 14

Имеется n одинаковых по внешнему виду монет, одна из



которых отлична по весу от остальных. За сколько взвешиваний на чашечных весах без гирь можно обнаружить эту монету?

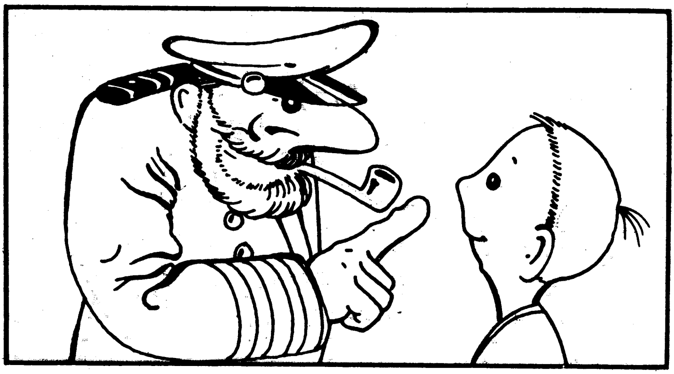
5. Игра в шары и карты, гребля и выборы президента клуба

На контрольной по арифметике никто не показал блестящих результатов. Жанно даже получил нуль. Чтобы немного утешиться, мальчики решили в субботу после обеда поиграть в шары.

В воскресенье была хорошая погода. Воспользовавшись этим, Жанно отправился на речку покататься на лодке. А вечером собрались все члены клуба, чтобы выбрать себе президента. Вот сколько возможностей представилось Жанно, чтобы освежить в памяти таинственные законы, управляющие числами, и тем самым подготовиться к следующей контрольной по арифметике.

1. ГРЕБЛЯ

Жанно требуется 2 ч, чтобы спуститься на лодке вниз по реке, и 3 ч, чтобы вернуться обратно.



Если Жанно гребет все время с постоянной частотой и силой, то сколько времени потребовалось бы ему, чтобы пройти по озеру то же расстояние, которое, двигаясь по реке, он преодолевает за 5 ч?

2. ПАРТИЯ В БАККАРА [1]

После очередной партии в баккара Жак, Пьер и Клод, у которых осталось по целому числу франков, подсчитали, что сумма, оставшаяся у Жака, плюс 1443-кратная сумма Пьера равна 2923-кратной сумме Клода.

При этом известно, что хотя Жак и не проигрался до конца, но у него осталось не больше чем 50 франков.

Сколько денег осталось у Клода?

3. КРУПНАЯ ИГРА В ШАРЫ

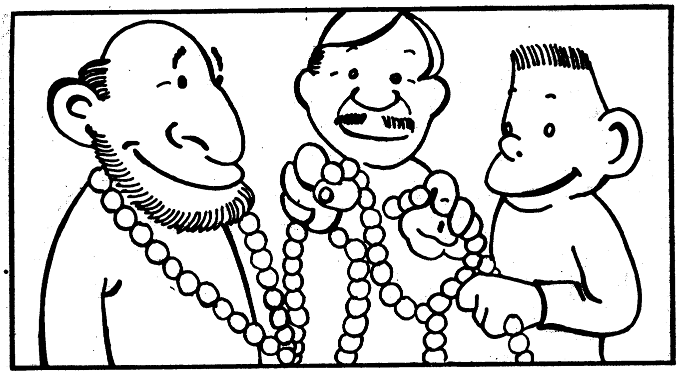
Жанно и Клод имеют вместе 26 шаров; Клод и Николя — 17 шаров; Николя и Поль — 31 шар; Поль и Пьер — 13 шаров, а Пьер и Жанно — 23 шара.

Сколько шаров было у Жанно, Клода, Николя, Поля и Пьера, вместе взятых?

4. ВОЗРАСТ КАПИТАНА

Капитан сказал своему сыну: «Утроенный квадрат твоего возраста плюс 26 лет равен квадрату моего возраста». Сколько лет капитану?

[1] Название карточной игры.— *Прим. перв.*



5. ГАЛСТУКИ

Три голубых галстука стоят вместе 20 франков, два желтых галстука и один красный — 20 франков.

Месье Блё, месье Жон и месье Руж [1] купили втроем 30 галстуков на 300 франков, причем каждый из них купил по крайней мере один галстук, и все они выбрали галстуки того цвета, который соответствует фамилии покупавшего.

Месье Вер знал, что один из остальных трех покупателей купил ровно столько галстуков, сколько он сам. Вер (надо ли говорить, что месье Вер покупал галстуки исключительно зеленого цвета) — и это помогло ему определить, сколько галстуков купили его друзья.

Кто купил больше галстуков — месье Жон или месье Блё?

6. ОЖЕРЕЛЬЯ

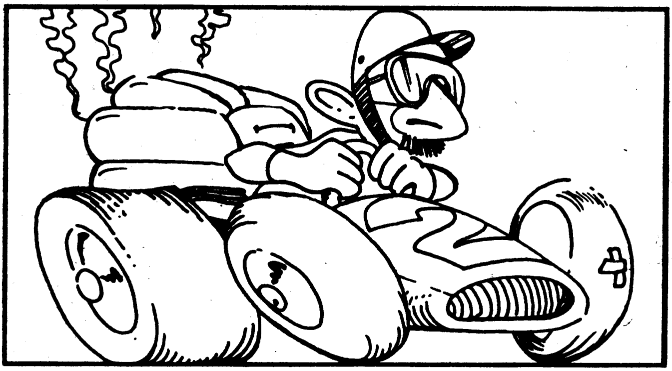
На рынке Жак приценился к ожерельям у трех продавцов, которые предлагали ожерелья по двум разным ценам и каждый предлагал ожерелья одного из двух типов.

Каждому из продавцов — молодому, старому и средних лет — Жак задал по одному вопросу:

Дороже ли ожерелье самого пожилого из продавцов ожерелья самого молодого из них?

---

[1] Блё (bleu) — голубой; жон (jaune) — желтый; руж (rouje) — красный и вер (vert) — зеленый (*франц*) — *Прим. перев.*



Дороже ли ожерелье продавца средних лет ожерелья самого пожилого продавца?

Не продадите ли вы мне два ожерелья за 100 франков?

Все три раза Жак получал один и тот же ответ. Купил ли он эти два ожерелья за 100 франков?

7. АВТОМОБИЛЬНЫЕ ГОНКИ

Два автомобиля стартуют одновременно. Первый регулярно проходит каждый круг за 1 мин, а второй — за 1 мин и 0,5 с. Через сколько кругов и в каком месте круга вторая машина догонит первую?

8. ВЫБОРЫ ПРЕЗИДЕНТА КЛУБА

На выборах президента клуба 48 его членам предлагалось голосовать за трех кандидатов — Жака, Пьера и Бернара.

Каждый член клуба должен на выданном ему листке для голосования перенумеровать трех кандидатов в порядке предпочтения. При подсчете голосов выяснилось, что Жак оказывался впереди Пьера чаще, чем Пьер впереди Жака. Пьер оказывался впереди Бернара чаще, чем Бернар впереди Пьера. Однако президентом клуба был избран именно Бернар.

Как это оказалось возможным? Попробуйте объяснить этот парадокс.

6. Разрезание треугольника

Любой многоугольник можно преобразовать в любой другой равновеликий ему многоугольник, разрезав его предварительно на конечное число многоугольных частей.

Доказательство этого утверждения не сложно, хотя и достаточно длинно. Напротив, по-видимому, не известно, как доказать, что разрезание является именно тем, которое позволит перейти от одного многоугольника к другому посредством разбиения первого на *наименьшее* возможное число частей.

Такое доказательство, по-видимому, еще можно найти в случае простых разрезаний, связанных с разбиением многоугольника на три или четыре части. Но оно, конечно, будет более трудным в случае сложных разрезаний, когда число частей превосходит восемь или десять.

Однако вернемся к треугольнику. Разрезания прямоугольника и параллелограмма, рассмотренные в гл. 2, подготовили нам необходимую почву для решения соответствующих задач с треугольником. К разрезанию треугольника общего вида лучше всего подойти, решив три следующие довольно легкие задачи.

ЗАДАЧА 1

Можно ли найти простое разрезание, содержащее пять частей и позволяющее преобразовать равносторонний треугольник в квадрат (рис. 8)?

ЗАДАЧА 2

На рис. 9 изображен прямоугольный треугольник. Можно ли преобразовать его в квадрат, разрезав предварительно на четыре части?

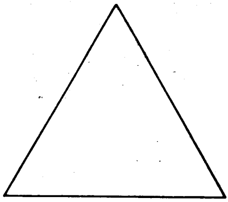


Рис 8

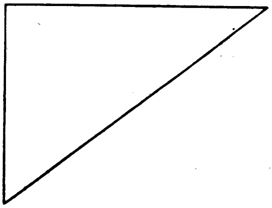


Рис 9

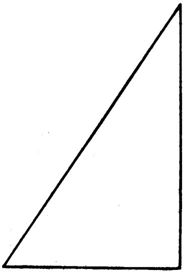


Рис 10

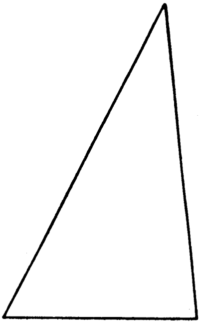


Рис 11

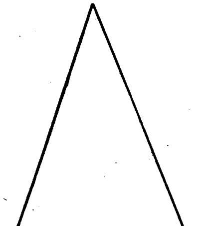


Рис 12

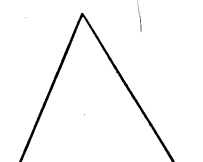


Рис 13

ЗАДАЧА 3

Предыдущую задачу удалось легко решить, сведя ее к случаю прямоугольника с отношением сторон, меньшим 2. На рис. 10 изображен другой прямоугольный треугольник, который нужно преобразовать в квадрат, разрезав только на четыре части Однако в качестве дополнительного условия мы требуем, чтобы отношение сторон промежуточного прямоугольника было больше 2.

Таким образом, потребуются четыре части, чтобы перейти от квадрата к прямоугольнику, и еще одна часть — чтобы перейти от прямоугольника к треугольнику; итого — пять частей.

Однако удается обойтись только четырьмя частями.

ЗАДАЧА 4

Рассмотрим теперь треугольник общего вида (рис. 11) Можно ли преобразовать его в квадрат, разрезав на пять (или меньше) частей?

ЗАДАЧА 5

Аналогично, можно ли преобразовать в квадрат треугольник, изображенный на рис 12, разрезав его меньше чем на пять частей?

ЗАДАЧА 6

Треугольник, изображенный на рис. 13, обладает той особенностью, что длина каждой его высоты оказывается меньше длины стороны, на которую эта высота опускается. Поэтому разрезание, использованное в решении предыдущей задачи, в данном случае неприменимо.

Можно ли, однако, и здесь найти решение, содержащее меньше пяти частей?

7. Истинные и ложные проблемы теории вероятностей. Стратегия игры в рулетку

Теория вероятностей — область знаний, богатая всякого рода парадоксами. Это связано с двумя обстоятельствами.

Во-первых, порой нас подводит математическая интуиция. Примером этому служит приведенный здесь знаменитый «Петербургский парадокс» [1] Проще говоря, наш ум отказывается принять, что, после того как на рулетке десять раз подряд выпадает «черное», вероятность того, что в следующий раз выпадет «красное», не больше, чем вероятность, что в одиннадцатый раз выпадет «черное».

Во-вторых, теория вероятностей всегда абстрагируется от объекта своего исследования и имеет дело с некой математической идеализацией, которая порой противоречит здравому смыслу.

Здесь сталкиваются две школы: «пуристов» и «лакситов» [2]. Пуристы хотели бы ограничить область применения теории вероятностей исключительно теми задачами, ради которых она была создана. Лакситы же хотели бы применять ее повсюду; при прогнозировании погоды, решении вопроса о жизни на других мирах, в разгадке тайны знаменитой «Железной маски» и т д.

Между этими двумя крайностями возможен разумный компромисс. Тем не менее в рассматриваемой ниже задаче мы можем следовать школе пуристов.

БАНКНОТА В 100 ФРАНКОВ

Месье Дюбуа положил на стол пачку банкнот по 50 и 100 франков. Чему равна вероятность того, что третья сверху банкнота будет 100-франковой?

Ответ лакситов. Поскольку мы не знаем ни общей суммы денег в пачке, ни числа банкнот у месье Дюбуа, искомая вероятность равна 1/2.

Комментарий. Теория вероятностей неприменима к подобным задачам. Если нам совсем не известны никакие данные, придающие задаче хоть какое-то подобие определенности, то нам остается лишь признаться в нашей несостоятельности — и не претендовать ни на что большее. Говоря, что имеется один шанс из двух за

[1] Этот парадокс был рассмотрен в 1713 г Николаем Бернулли (1695—1726), представителем знаменитого математического семейства, во время его пребывания в Петербурге — отсюда и название «Петербургский парадокс».— *Прим. ред.*

[2] Соответственно от purus *(лат.)* — чистый и laxus *(лат.)* — широкий.— *Прим. перев.*

то, что неизвестная банкнота окажется достоинством в 100 франков, мы ничего нового не добавляем к тому простому утверждению, что это есть либо банкнота достоинством в 100 франков, либо банкнота достоинством в 50 франков.

Точно так же не следует утверждать, что «в силу нашего полного незнания» имеется один шанс из двух за то, что существует жизнь на других мирах.

Классическая теория вероятностей[1] применима к событиям, связанным с множеством событий *равновероятных*. То, что мы ничего не знаем про два взаимно дополнительных случайных исхода, вовсе не означает, что эти исходы равновероятны.

Следует ли, однако, накладывать на область приложения теории вероятностей слишком сильные ограничения? Прилагательное «вероятный» используется в повседневности не только в чисто математическом смысле.

Если, говоря о «вероятной погоде на завтра», мы заявляем, что имеется один шанс из трех за то, что завтра будет хорошая погода, то это означает, что если известные нам факторы (давление, температура, статистика за прошлые годы) не изменятся, то в среднем они в одном случае из трех влекут за собой хорошую погоду на завтра, а в двух случаях из трех — дождь.

Точно так же под «Железной маской» скрывалась вполне определенная личность. Говорить при этом о «вероятности» весьма рискованно — нас могут осмеять. Но при тех исторических сведениях, какими мы располагаем, некоторые кандидаты кажутся более «вероятными», чем другие. Условившись не терять из виду точного содержания термина «вероятность», хороший историк все же может рискнуть сказать, что есть девять шансов из десяти за то, что под железной маской скрывался некий Есташ Доже[2]

[1] Здесь имеется в виду так называемое *классическое определение вероятности,* базирующееся на каком-то множестве **равновероятных** основных (или элементарных) событий, какими могут служить извлечение из карточной колоды наугад какой-либо карты (одной из 52 возможных) или выпадение на игральной кости данного числа очков и т. д.— *Прим. ред.*

[2] Разумеется, тут может иметься в виду лишь так называемая «психологическая вероятность», довольно далекая от точной (математической) вероятности.— *Прим. ред.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

В круге дана хорда AB, длина которой равна радиусу круга (рис. 14). Чему равна вероятность того, что случайно проведенная хорда в этом круге окажется меньше, чем AB?

Можно рассуждать двумя различными способами. Проведем хорду AC, равную AB (рис. 15). Затем

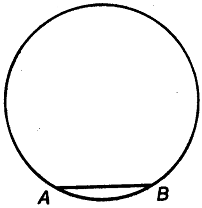


Рис 14

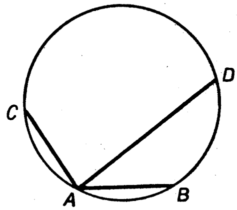


Рис 15

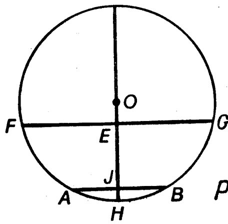


Рис 16

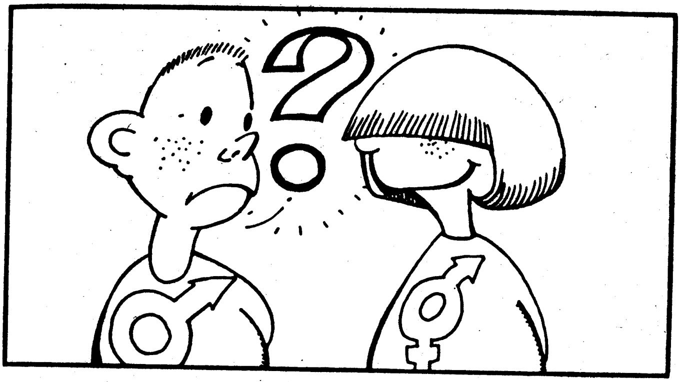
проведем новую хорду из точки A. Если другой конец D новой хорды окажется на дуге CAB, то эта хорда будет меньше хорды AC. Искомая вероятность, следовательно, равна отношению дуг данного круга, ограниченных точками B и C, т. е. $1/3 \approx 0{,}33$.

Но чтобы определить искомую вероятность, можно было бы равным образом отталкиваться от серединного перпендикуляра OH, проведенного к хорде AB (рис. 16). Взяв случайную точку E на этом перпендикуляре, проведем новую хорду FG, параллельную AB.

Искомая вероятность равна тогда JH/JO:

$$\frac{JH}{JO} = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \approx 0{,}15.$$

Обсуждение парадокса. Эти противоречивые результаты получились из-за того, что задача не была поставлена достаточно точно. Эту задачу нельзя отнести



к правильно поставленным задачам теории вероятностей, в частности, потому, что способ выбора случайной хорды нам точно не указан.

Аналогично задачи, начинающиеся словами «выбирается случайное число», или «точка на прямой», или «прямая на плоскости», могут приводить к ошибочным и противоречивым выводам, если способ «случайного выбора» числа, точки или прямой не указан точно.

Возвращаясь к области приложений, более близкой к теории вероятностей, рассмотрим следующий парадокс.

ПАРАДОКС «МАЛЬЧИК ИЛИ ДЕВОЧКА?»

В некой семье — двое детей, причем известно, что по крайней мере один из них — мальчик. Чему равна вероятность того, что другим ребенком окажется девочка?

Комментарий. На ум приходят два ответа.

Либо мы считаем, что имеется один шанс из двух за то, что вторым ребенком окажется девочка. Но тогда наш ответ базируется на интуиции, доверять которой опасно.

Либо мы констатируем, что эта задача, сформулированная подобным образом, не имеет особого смысла. В самом деле, поскольку мы знаем, что в семье есть два ребенка, один из которых — мальчик, то второй ребенок — либо мальчик, либо девочка. Значит, как и в задаче о банкнотах в 100 франков или о жизни на Марсе, мы вынуждены ограничиться лишь повторением того, что нам известно.

На самом деле, если поставить эту задачу более точно, то ее можно свести к ситуации с множеством равновероятных элементарных исходов; однако здесь как будто тоже можно прийти к двум разным ответам.

Действительно, поставим задачу так: какую долю среди всех семей, где есть двое детей, хотя бы один из которых — мальчик, составляют семьи, где другой ребенок — девочка?

Эту задачу можно свести к сходной задаче.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ ИЗВЛЕЧЕНИЕ ДВУХ ШАРОВ

Рассмотрим следующую игру. Имеется некоторое множество шаров, состоящее из равного количества черных и белых шаров. Игрок извлекает шары из этого множества случайным образом, так что вероятность вытянуть белый шар в точности равна 1/2. (Можно представить себе, что другой человек после каждого вытягивания шара добавляет к множеству всех шаров шар того же цвета, что и извлеченный, дабы поддержать равенство между числом черных и белых шаров.)

Игрок вытягивает последовательно два шара. Таким образом, мы оказываемся в той же ситуации, что и в предыдущей задаче (с той лишь разницей, что вероятность появления мальчика или девочки не равна в точности 1/2).

Известно, что один из двух вынутых шаров — белый. Чему равна вероятность того, что другой шар окажется черным?

Анализ этой задачи можно провести двумя разными способами, благодаря чему, собственно, и возникает парадокс «Мальчик или девочка».

Первое решение. При вытягивании двух шаров имеются четыре возможных исхода:

белый — белый,
белый — черный,
черный — белый,
черный — черный.

Известно, что один из двух вытянутых шаров оказался белым. Но это происходит в одном из первых трех случаев, причем в двух из них другой шар оказывается черным, а в одном — белым. Значит, шансы за то, что второй шар окажется черным, равны двум из трех: искомая вероятность $2/3 \approx 0{,}66$.

Второе решение. Имеются четыре возможных исхода.

В этих четырех исходах белый шар фигурирует четыре раза. Известный нам белый шар может быть любым из этих четырех шаров. Два раза из четырех этот белый шар встретится нам «в компании» с другим белым шаром (этот другой белый шар может быть первым или вторым в первой позиции из предыдущего решения) и два раза из четырех — с черным шаром. Следовательно, искомая вероятность равна $1/2 = 0{,}5$.

Обсуждение парадокса «Мальчик или девочка». Какой же результат является правильным: 2/3 или 1/2?

Ответ на этот вопрос можно получить, более тщательно анализируя постановку задачи.

В первом решении мы не продвинулись дальше констатации того факта, что «один из вынутых шаров оказался белым»; мы, не раздумывая, заявили, что среди семей, где есть хотя бы один мальчик, в двух семьях из трех есть мальчик и девочка, никак не уточняя, что же мы **точно** имеем в виду, говоря «в двух семьях из трех». Поэтому хотя первое решение и нельзя, строго говоря, назвать «ложным» — ведь ошибки мы, кажется, не совершили,— но его все-таки следует отбросить, поскольку оно не содержит никакого анализа условия задачи.

Во втором решении мы стремились уточнить способ действия (который не был дан в условии задачи).

Можно, например, представить себе, что два вынутых шара один за другим падают в ящик и что игрок затем случайно выбирает один шар из этого ящика.

Пусть этот шар оказался белым. Чему равна вероятность того, что другой шар окажется черным?

После такого уточнения возможностей вынуть белый шар на самом деле окажется четыре, причем два раза из четырех «сопровождающим» шаром будет черный. В результате уточнения способа, с помощью которого извлекаются шары, мы получаем согласующийся с нашей интуицией ответ: 1/2.

В заключение заметим, что математические выводы возможны лишь в задачах с достаточно ясными условиями, допускающими перевод на язык логики [1].

Когда имеется некая двусмысленность, как в нашем первом решении, или же, как мы это увидим в последней главе, в случае логических парадоксов математические рассуждения не приводят ни к каким конкретным выводам.

Рассмотрим теперь несколько задач из теории вероятностей, где, с одной стороны, нас подводит интуиция, а с другой — точное, но недостаточно внимательное к существу дела применение математических методов ведет к совершенно нереальным выводам, показывая тем самым границы применимости теории вероятностей.

РУЛЕТКА

Безусловно, именно рулетка породила многочисленные искажения теории вероятностей при выработке подходящей стратегии игры.

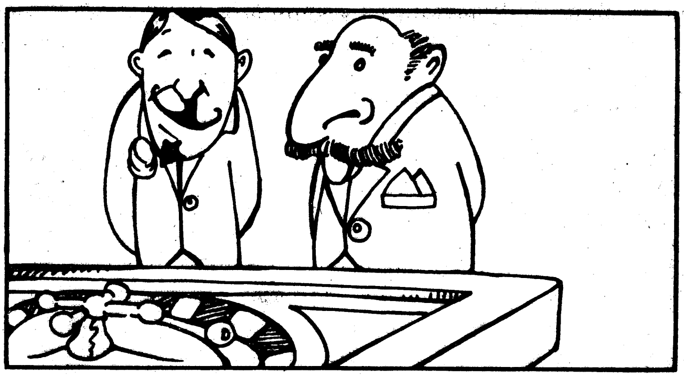
В Приложении III описана рулетка, даны соответствующие стратегии игры в рулетку и дан всесторонний математический анализ этой игры.

Математически обоснованная стратегия, согласно Д'Аламберу, состоит в том, что ставят на простой выигрыш, например на «красное», так, чтобы в каждой серии выиграть 1 франк, удваивая ставку в случае проигрыша до тех пор, пока не выиграют (см. Приложение III).

---

[1] Вот задача почти такая же, как та, которую мы разбирали, и сформулированная достаточно строго: чему равна вероятность того, что среди двух первых детей в некой семье по крайней мере один окажется мальчиком?

Здесь условие не содержит никаких двусмысленностей и приводит к ответу 3/4 (при этом мы, конечно, абстрагируемся от того, что вероятность появления мальчика не равна в точности 1/2)



Эта стратегия была бы беспроигрышной, если бы не существовало ограничений на ставки игроков либо в виде максимально допустимой ставки, либо просто из-за того, что игрок не располагает достаточно большой суммой денег.

Второй тип стратегии состоит в том, что наблюдают некоторую серию предыдущих игр и в зависимости от ее результатов с помощью более или менее сложных правил выводят, какой именно цвет при очередной ставке следует предпочесть.

При таких стратегиях предполагается, что шарик рулетки обладает своего рода памятью и поэтому результат очередной партии зависит от серии предыдущих партий. Если применить теорию вероятностей к предыдущим правилам, дабы определить последовательные ставки как функции предыдущих, то мы легко получим, что при любой выбранной системе игры математическое ожидание проигрыша всегда составляет 1/74 сделанных ставок [1].

Априори имеется только один шанс из 1024 за то, что «решка» выпадет подряд 10 раз. Но когда «решка» выпадает подряд 9 раз, то 9/10 всего «пути» оказывается уже пройденным. И потому имеется один шанс из двух, что решка выпадет и в 10-й раз.

Похоже, что из подобных же соображений солдаты в первую мировую войну прятались во время артобстрела в воронке от снарядов, считая, что вероят-

[1] 1/74 при простых ставках и 1/37 при ставках на числах (см. Приложение III)

ность попадания снаряда дважды в одну и ту же воронку ничтожно мала[1].

Здесь тот факт, что снаряд уже попал в данное место, снова означает, что половина «пути» пройдена, однако шансов на то, что следующий снаряд упадет в уже готовую воронку, ничуть не меньше, чем на то, что он упадет на тридцать метров дальше.

И тем не менее, хотя логика и заставляет нас рассуждать подобным образом, разве интуиция не побуждает нас поставить на «красное» в десятый раз («красное» обязательно должно выпасть сейчас!) и спрятаться в воронку от снаряда? Сейчас мы увидим на примере так называемого «Петербургского парадокса», что чисто математическое рассуждение, даже безупречное, может привести к выводам, которые здравый смысл отказывается принять.

«ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПАРАДОКС» И НЕСКОЛЬКО ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ

Первая предварительная задача. Игрок и банкир встречаются за игорным столом, причем игра идет на следующих условиях.

Игрок делает ставку на некий номер, выбранный произвольно из десяти возможных номеров (от 1 до 10). Если выпадает номер, выбранный игроком, то банкир вручает игроку 9 франков. Если же этого не происходит, то банкир забирает ставку игрока.

Какой должна быть ставка игрока, чтобы игра оказалась честной?

Ответ. Пусть m — это ставка. У игрока есть один шанс из 10 выиграть 9 франков и 9 шансов из 10 потерять m франков.

Чтобы игра была честной, должно выполняться соотношение

$$\frac{1}{10}\times 9=\frac{9}{10}m.$$

Следовательно, $m = 1$.

Вторая предварительная задача. Игрок и банкир встречаются за игорным столом при тех же условиях

[1] В этом теоретическом (и притом — неправильном!) рассуждении мы не учитываем, очевидно, того чисто практического соображения, что солдату лучше укрыться на дне воронки, чем находиться под огнем на открытой местности.

игры с той только разницей, что на сей раз игрок вместо 9 франков получает 9000. Чему должна равняться ставка m нашего игрока?

Ответ. Чтобы игра была честной, ставка игрока должна равняться 1000 франков. Если игрок и банкир решат провести на этих условиях ряд партий, то риск для игрока окажется приемлемым. Теперь выигрыши и проигрыши игрока оказываются более значительными, чем в предыдущей игре, но игрок может надеяться выигрывать в среднем чаще одного раза из десяти и тем самым остаться в выигрыше после всей серии партий.

Напротив, если игрок и банкир решат сыграть всего один раз, то вопрос о риске для игрока можно сформулировать так: рискнет ли игрок потерять свою ставку в 1000 франков (девять шансов из десяти) взамен лишь на один шанс из десяти выиграть 9000 франков?

В самом деле, честность игры — не достаточное условие для того, чтобы игрок рискнул своими деньгами. Третья предварительная задача показывает это со всей определенностью.

Третья предварительная задача. Если вновь изменить условие задачи и принять на сей раз, что имеется 1 000 000 номеров и выигрыш для игрока, который ставит 1 000 000 франков, равен 999 999 000 000 франков, когда выпадает его номер, то можно видеть, что игрок должен ставить каждый раз по миллиону франков в обмен на единственный шанс из миллиона выиграть (правда, миллион собственных ставок без одной!).

Несмотря на то что эта игра честная (или, говоря иначе, безобидная), какой игрок рискнул бы в нее сыграть? Это ясно показывает границы применимости математических рассуждений к реальным играм.

«ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПАРАДОКС» В СОБСТВЕННОМ СМЫСЛЕ СЛОВА

Игрок играет в «орла» и «решку» против «банка», представителем которого является определенное лицо, именуемое «банкир».

В начале игры игрок вручает банкиру некую ставку. Затем он подбрасывает монету.

Если выпадает «решка» (цифра), то игрок проигрывает, игра прекращается и банкир забирает первоначальную ставку игрока. Если выпадает «орел» (герб), то банкир вручает игроку 2 франка, причем игра на этом не кончается.

Многократно подбрасывается монета. Если выпадает «решка», игра прекращается и банкир забирает поставленную игроком ставку. Если выпадает «орел», банкир вручает некоторую сумму игроку: 2 франка при первом бросании плюс 4 франка при втором бросании (если второй раз подряд выпадает «орел») плюс 8 франков при третьем бросании... плюс 2^n франков при n-м бросании и т. д.

Какова должна быть начальная ставка игрока, чтобы игра стала «безобидной»?

Ответ. Вероятности выигрыша игрока будут следующими:

один шанс из 2 выиграть 2 франка,
один шанс из 4 выиграть 4 франка,
. . . .
. . . .
один шанс из 2^n выиграть 2^n франков
и т. д.

Соответственно средняя сумма выигрыша будут равна

$$\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{4}\times 4+\frac{1}{8}\times 8+\ldots+\frac{1}{2^n}\times 2^n+\ldots=1+1+1+\ldots+1+$$

Таким образом, шанс [1], оценивающий выигрыш игрока, следует считать бесконечным. Чтобы игра стала безобидной, первоначальная ставка игрока должна быть *бесконечной* (!).

Имеются различные объяснения этого парадокса. Например, говорят, что решение этой задачи предполагает существование бесконечно богатого игрока, а поскольку такого игрока нет, то нет и никакого парадокса.

На самом деле гораздо более простое решение вытекает из анализа, проделанного в предыдущей

---

[1] Точнее, среднее значение (математическое ожидание).— *Прим. перев.*

задаче: здравый смысл находит нецелесообразным ставить большую сумму ради пренебрежимо малого шанса выиграть сумму, гораздо большую, чем та, которая была поставлена.

В предыдущем рассуждении можно выделить два этапа, второй из которых возвращает нас к исходной точке.

Во-первых, мы отметили, что математическая интуиция, которая привела бы нас к начальной ставке в 10, 20 или, быть может, 30 франков, несостоятельна.

Но, во-вторых, мы отмечаем, что здравый смысл игрока соединяется с математической интуицией, не принимая условий этой игры, хотя она честная и логичная.

Математика создана человеком, исходя из его потребностей. Она удовлетворяется тем, что устанавливает различные логические соотношения, отправляясь от исходных элементов, фиксированных человеком,— в данном случае правил игры и того, что понимается под «безобидной» игрой.

В нашем анализе «Петербургского парадокса» мы не ввели понятий «разумного риска», который принимает игрок, или «максимально допустимого проигрыша» игрока. Не удивительно поэтому, что мы пришли к неразумному, «парадоксальному», выводу. Но возможно ли найти математический подход к задаче, который учитывал бы психологию игрока? Можно ли, например, требовать от теории вероятностей, чтобы она снабдила нас «разумной» стратегией игры в рулетку?

«РАЗУМНАЯ» СТРАТЕГИЯ ИГРЫ В РУЛЕТКУ

Можно счесть парадоксальным (но вполне в духе главы, посвященной краткому описанию парадоксов теории вероятностей), что мы говорим о «разуме», тогда как игра — это сплошная страсть.

Оставляя в стороне азарт игры, можно найти три объяснения в поддержку тех, кто рискует играть в рулетку.

1. Во-первых, даже если бы игра не была безобидной и у банка оказалось больше шансов на выигрыш, чем у игрока, не было бы ничего невероятного в том,

что, с одной стороны, в какой-то из вечеров банк останется в проигрыше и что, с другой стороны, даже если банк и выигрывает в целом, то попадаются отдельные игроки, которым удается выиграть у банка. Даже при очень длительной игре, например в 1000 партий, где банк выигрывает почти наверняка, из сотни игроков двадцать или тридцать (их число зависит от их системы игры — на номера или на простые шансы) окажутся в выигрыше. Хотя речь здесь идет лишь о следствиях из свойств случайных величин, правильно предсказываемых теорией вероятностей, выигравшие игроки увидят в этом блестящее подтверждение эффективности используемых ими стратегий игры.

2. Игроки, использующие стратегии игры типа стратегии Д'Аламбера, выигрывают в большинстве случаев. Игрок, который выигрывает девять раз подряд и потеряет весь свой выигрыш за один десятый раз, будет склонен рассматривать свои победы и поражения в свете более оптимистичном, чем это есть в реальности, относя свой большой проигрыш за счёт невезения и переоценивая свои выигрыши по сравнению с проигрышами.

3. Разумный игрок, который играет лишь от случая к случаю, может подвергаться лишь ограниченному риску. С одной стороны, закон больших чисел применим, только начиная с некоего порога, который мы хотим оценить. С другой стороны, разумный игрок, который, применяя некую стратегию игры, выиграет, например, десять раз подряд, не заметит, что его шансы на проигрыш возросли. Это, к несчастью, может послужить побудительным мотивом к продолжению игры.

Как показано в Приложении III, разумная стратегия игры может состоять в том, чтобы в серии из ста партий пользоваться стратегией Д'Аламбера.

Эта разумная стратегия дает игроку:

девять шансов из десяти выиграть сумму в 100 начальных ставок, играя с начала некой серии;

один шанс из десяти проиграть сумму в 924 начальные ставки.

А какова вероятность проиграть дважды в сериях из ста партий, т. е. проиграть сумму в 2000 начальных ставок? Эта вероятность близка к 0,3%.

Окончательно эта стратегия, хотя и разумная, дает много шансов добиться малых выигрышей и один небольшой, но не пренебрежимо малый шанс оказаться в большом проигрыше.

Не состоит ли последний парадокс в следующем: игрок отказывается играть в игры безобидные, но с увеличенными шансами на проигрыш и, наоборот, предпочитает играть в рулетку, игру благоприятную для банка, где рискует проиграть много, только если много играет, но где шансы на выигрыш очень малы, когда число партий велико?

Парадоксы «Мальчик или девочка», «Банкнота в 100 франков» и «Петербургский парадокс» объясняются легко: недостаточно точная постановка задачи, неполные данные, нестрогое использование теории вероятностей.

Последний же парадокс можно объяснить, лишь обращаясь к психологии игрока. Кроме того, страсть к игре и надежда на выигрыш, неверное представление о реальности толкают игрока на принятие необоснованных решений. Впрочем, много ли найдется игроков, которые действительно сознавали, что есть лишь один шанс из двух выпасть «красному», после того, как «черное» выпало десять раз подряд!

8. Монеты двух различных весов

В гл. 4 мы встречались с задачами, где среди одинаковых с виду монет одна отличалась по весу от остальных. В этой главе мы будем считать, что число монет, отличных по весу от остальных, неизвестно.

Например, если у нас есть четыре монеты двух различных весов, то мы не знаем, распределены ли монеты по весу в две равные группы или же в одной группе содержатся три монеты, а в другой — одна.

Обозначим через L более тяжелые, а через l более легкие монеты; тогда четырнадцать возможных распределений примут вид

$L\ L\ L\ l$	$l\ l\ l\ L$	$L\ L\ l\ l$
$L\ L\ l\ L$	$l\ l\ L\ l$	$L\ l\ L\ l$
$L\ l\ L\ L$	$l\ L\ l\ l$	$L\ l\ l\ L$
$l\ L\ L\ L$	$L\ l\ l\ l$	$l\ L\ L\ l$
		$l\ L\ l\ L$
		$l\ l\ L\ L$

Требуется с помощью минимального числа взвешиваний на чашечных весах без гирь определить, какое именно распределение «тяжелые — легкие монеты» имеет место на самом деле.

ЗАДАЧА 1

Имеется шесть одинаковых с виду монет двух разных весов. За сколько взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти распределение «тяжелые — легкие»? Как нужно при этом действовать?

ЗАДАЧА 2

Имеется пять монет двух разных весов. Можно ли найти распределение их весов с помощью всего лишь трех взвешиваний?

ЗАДАЧА 3

Дано n одинаковых с виду монет двух разных весов. Чему равно минимальное число взвешиваний, с помощью которых можно найти искомое распределение весов монет?

ЗАДАЧА 4

Дано восемь одинаковых с виду монет двух разных весов. Как найти распределение их весов?

ЗАДАЧА 5

Дано двенадцать одинаковых с виду монет двух разных весов. Как и с помощью какого числа взвешиваний можно найти распределение их весов?

ЗАДАЧА 6

Дано двенадцать одинаковых с виду монет, среди которых две, одинаковые по весу, тяжелее десяти остальных, также равных между собой по весу. Как найти эти две более тяжелые монеты с помощью всего лишь четырех взвешиваний, причем при первом взвешивании на каждую чашу весов обязательно должно быть положено по пяти монет?

ЗАДАЧА 7

Дано двенадцать одинаковых с виду монет, три из которых, равные по весу, тяжелее девяти остальных, также равных между собой по весу. Как найти эти три более тяжелые монеты с помощью пяти взвешиваний?

9. Охота на тигра, шут и девиз герцога

На этот раз Жанно покидает свой чердак, по крайней мере, в воображении. Верхом на белом коне он отправляется охотиться на тигра.

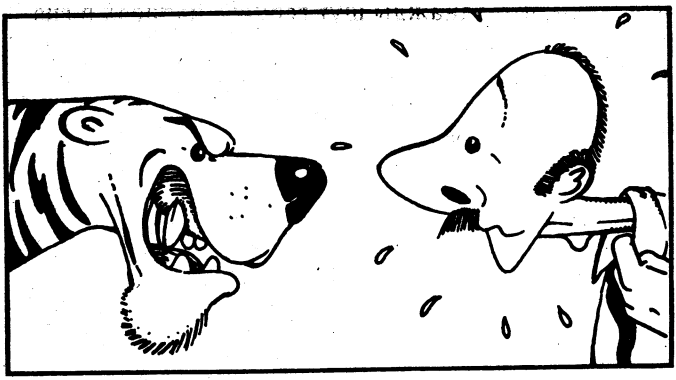
Затем, вернувшись на чердак, Жанно находит на дне старой корзины пожелтевший пергамент; и вот он переносится на несколько веков назад, пытаясь расшифровать девиз таинственного дворянина и забытое имя его шута.

1. ОХОТА НА ТИГРА

Попытайтесь определить, на какое животное отправился охотиться Жанно, если известно, что название этого животного состоит из четырех букв, причем каждая буква зашифрована числом, равным ее порядковому номеру в алфавите ($A=1$, $Б=2$, $В=3$ и т. д.). Относительно этих чисел мы можем сказать следующее:

1) первое из них на 1 отличается от кратного 7;
2) второе число меньше четвертого;
3) сумма двух чисел равна 14;
4) среди четырех чисел есть простое число.

О каком животном идет речь?



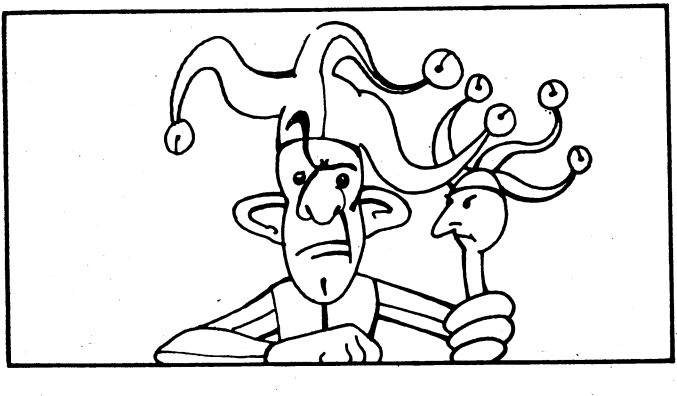
2. ШУТ ГЕРЦОГА

Девиз герцога состоит из трех слов, каждое из которых содержит по три буквы и выражает железный закон, введенный одним из его предков.

Эти три слова написаны друг под другом так, что если сопоставить каждой букве одну из девяти первых цифр (от 1 до 9), то получится сложение «столбиком».

Этот «столбик» выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{r} LOI \\ +\ FER \\ \hline DUC \end{array}.$$



Рассказывают, что однажды шут герцога написал в гневе, сохраняя числовые значения букв,

$$\begin{array}{r} FOL^{1} \\ +\ DUC \\ \hline IRE \end{array}$$

Здесь снова, заменяя буквы соответствующими цифрами, мы получим правильное сложение.

Шут подписал свое сложение числом 7834. Подписался ли он своим именем?

3. «СТОЛБИКИ» ГЕРЦОГА

Рассмотрим все сложения «столбиком» предыдущего типа, т. е. такие, где два числа из трех букв в сумме также дают число из трех букв, при этом используются все цифры от 1 до 9.

Какова особенность таких сложений?

4. ШАШКИ НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Имеется шахматная доска с 64 клетками, сторона каждой из которых равна 3 см, что совпадает с диаметром шашек.

Сколько шашек можно расположить на этой доске так, чтобы они не перекрывались (иначе одну придется расположить поверх другой) и не выходили за пределы доски?

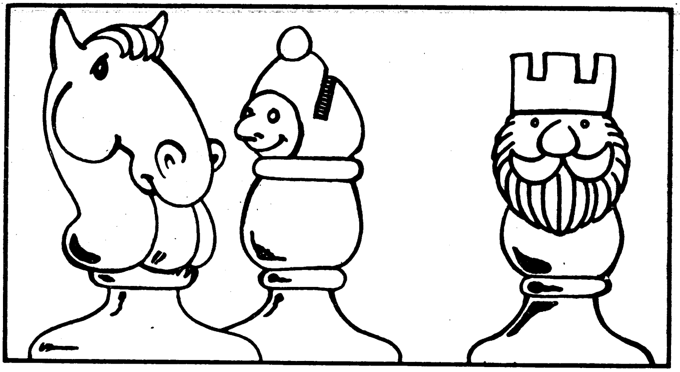
5—8. ЧЕТЫРЕ АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

5. Можно ли найти два числа, такие, произведение суммы которых на их произведение равнялось бы 29 400?

6. Из n шахматных пешек выложен прямоугольник, состоящий из p рядов по q пешек в каждом. Эти пешки можно расположить 11 различными способами, если не различать прямоугольник из p рядов по q пешек от прямоугольника из q рядов по p пешек.

Какое наименьшее число пешек удовлетворяет этому условию?

[1] Loi — закон; fer — железо; duc — герцог; fol — шут (*франц.*) ire — (искаж. *лат. irae*) — гнев.— *Прим. перев.*



7. Число 5 277 319 168 — пятая степень некоего целого числа. Попытайтесь найти это число.

8. Известно, что при умножении двух чисел получается миллиард.

Известно также, что сумма цифр первого числа равна сумме цифр некоего третьего числа, которое после умножения на четвертое число также дает в произведении миллиард.

Наконец, первое число кратно сумме своих цифр. Чему равно это первое число при условии, что все четыре числа содержат по пять цифр, что все они различны и что первое число больше третьего?

9. ДВА ЗЕМЕЛЬНЫХ НАДЕЛА

Поль и Жан имеют по наделу земли прямоугольной формы, стороны которых выражаются целым числом метров, а площади отличаются на 1 м^2.

Куб длины участка Жана равен квадрату этой длины, умноженному на 5000, плюс эта длина, умноженная на 25 019, и плюс еще 30 030. Длина участка Поля превышает на 3298 м длину участка Жана.

Чей надел больше?

10. Различные разрезания

В задачах на разрезание, рассмотренных в гл. 2 и 6, мы продвигались от простого к сложному, начиная с

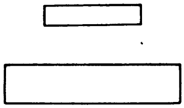


Рис 17

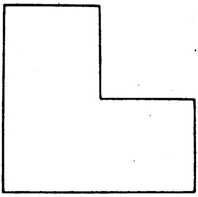


Рис 18

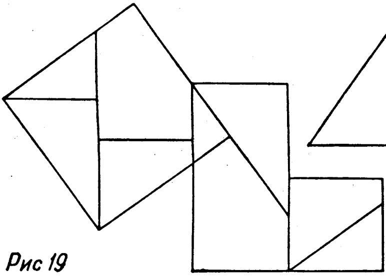


Рис 19

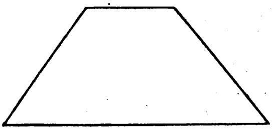


Рис 20

самых основ — с простейших фигур: прямоугольника, параллелограмма и треугольника.

Метод отыскания соответствующих разрезаний был аналитическим и дедуктивным.

Нижеследующие задачи, напротив, частично апеллируют и к интуиции.

1. ДВА ПРЯМОУГОЛЬНИКА

На рис. 17 изображены два прямоугольника. Сколько необходимо сделать разрезов ножницами для того, чтобы из получившихся кусочков можно было сложить один прямоугольник?

2. СТУПЕНЬКИ ЛЕСТНИЦЫ

Фигуру, изображенную на рис. 18, можно легко преобразовать в квадрат с помощью разрезания ее на пять частей (рис. 19).

А нельзя ли обойтись здесь меньшим числом частей — скажем, четырьмя?

3. ТРАПЕЦИЯ

Можно ли изображенную на рис. 20 трапецию разрезать не более чем на четыре части так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат?

4. ДВА КВАДРАТА ИЗ ОДНОГО

Можно ли разрезать квадрат на многоугольные части, такие, что из них удастся сложить два других квадрата, причем площадь большего из этих квадратов должна в пять раз превышать площадь меньшего?

5. СНОВА ДВА КВАДРАТА ИЗ ОДНОГО

В решении предыдущей задачи мы разрезали квадрат на пять частей, из которых затем складывались два меньших квадрата.

А можно ли преобразовать квадрат в два меньших квадрата, разрезав его менее чем на пять частей?

6. ТРИ КВАДРАТА ИЗ ОДНОГО

Можно ли преобразовать один квадрат в три, площади которых были бы пропорциональны 2, 3 и 4?

7. ОПЯТЬ ТРИ КВАДРАТА ИЗ ОДНОГО

В решении предыдущей задачи квадрат, разрезанный на восемь частей, преобразовывался в три меньших квадрата.

А можно ли решить эту задачу, разрезав квадрат менее чем на восемь частей?

8. РАЗРЕЗАНИЕ БУКВЫ «S»

На рис. 21 изображена стилизованная буква «S», которую можно преобразовать в квадрат, разрезав предварительно на четыре части.

Можно ли решить эту задачу, разрезав наше «S» всего лишь на три части?

9. ТРУБА КАМИНА

Можно ли преобразовать в квадрат каминную трубу, изображенную на рис. 22, посредством ее разрезания всего лишь на три части?

10. ТРИУМФАЛЬНАЯ АРКА

На рис. 23 изображена триумфальная арка, которую нужно преобразовать в квадрат, разрезав на четыре части.

11. ИМЯ

Жанно (Jeannot), который интересуется всем на свете, хотел бы преобразовать четыре буквы своего имени (рис. 24) в четыре квадрата.

Не могли бы вы помочь ему в этом?

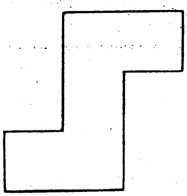


Рис 21

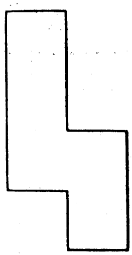


Рис 22

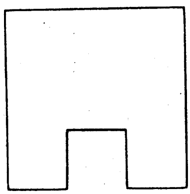


Рис 23

12. ДАЛЬШЕ — БОЛЬШЕ

Жанно нашел требуемые четыре разрезания (см. задачу 11). А теперь он хотел бы преобразовать эти четыре буквы в **один** квадрат. После многочисленных попыток, которые приводили к очень сложным решениям, Жанно слегка изменил одну из букв и нашел способ разрезания, содержащий только девять частей.

Каково это решение?

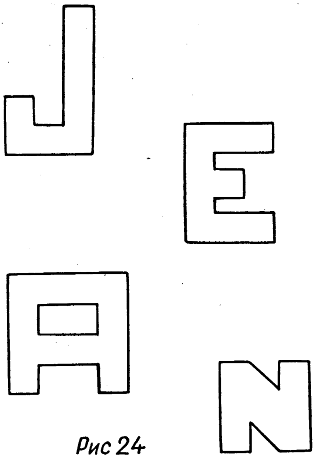


Рис 24

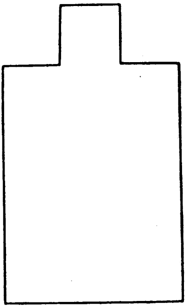


Рис 25

13. БУТЫЛКА

Не могли бы вы с помощью разрезания, содержащего не более четырех частей, преобразовать в квадрат бутылку, изображенную на рис. 25?

11. Еще несколько задач о монетах и предметах разного веса

ЗАДАЧА 1

Имеются три предмета разного веса. За сколько взвешиваний удастся их расположить в порядке возрастания веса с помощью чашечных весов без гирь и как именно здесь следует поступать?

ЗАДАЧА 2

Пусть теперь дано четыре предмета различного веса. За сколько взвешиваний их можно расположить в порядке возрастания веса с помощью рычажных (или чашечных) весов?

ЗАДАЧА 3

Рассмотрим более общую ситуацию. Имеется n предметов различного веса; сколько взвешиваний нам может потребоваться, чтобы расположить их в порядке возрастания веса?

ЗАДАЧА 4

Дано 8 предметов различного веса. Мы начинаем распределять их в порядке возрастания веса в двух группах, по четыре предмета каждая.

В результате мы получили [1]

$$1 \searrow 2 \searrow 3 \searrow 4,$$

и

$$5 \searrow 6 \searrow 7 \searrow 8$$

Можно ли расположить в нужном порядке эти 8 предметов с помощью шести дополнительных взвешиваний?

ЗАДАЧА 5

В решении задачи 3 было установлено, что требуется не менее шестнадцати взвешиваний для того, чтобы расположить в порядке возрастания веса восемь предметов различного веса. Однако достаточно ли здесь шестнадцати взвешиваний? Если да, то как именно следует производить взвешивания?

ЗАДАЧА 6

Можно ли расположить таким же образом девять предметов разного веса за девятнадцать взвешиваний?

ЗАДАЧА 7

В задаче 1 мы видели, как расположить по весу три предмета разного веса за три взвешивания.

Как и за сколько взвешиваний можно расположить в порядке возрастания веса четыре одинаковые с виду монеты трех различных весов?

---

[1] Напомним, что это значит: предмет 1 тяжелее предмета 2, который тяжелее предмета 3, который в свою очередь тяжелее предмета 4.

ЗАДАЧА 8

Как и за сколько взвешиваний можно упорядочить пять одинаковых с виду монет трех различных весов?

ЗАДАЧА 9

Как и за сколько взвешиваний можно упорядочить по весу шесть одинаковых с виду монет трех различных весов?

ЗАДАЧА 10

В пятницу вечером месье Мартен предложил своим друзьям решить задачу 8 о пяти монетах трех различных весов.

На следующей неделе месье Бертран заявил, что он исследовал все возможности и пришел к выводу, что решить задачу можно лишь с помощью шести взвешиваний. Тогда месье Мартен показал своим друзьям пять монет трех различных весов и объяснил, как определить среди них тяжелые, средние и легкие во всех случаях не более чем за пять взвешиваний.

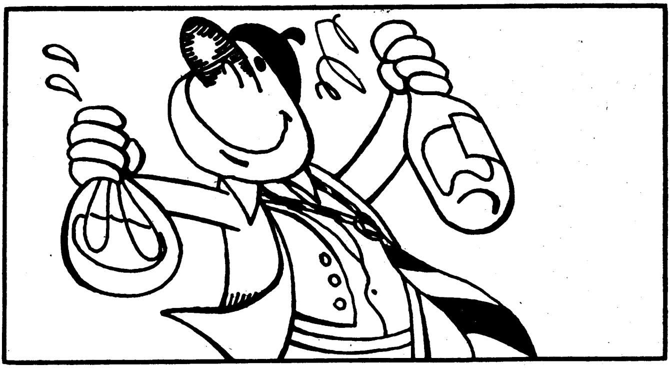
Как это возможно?

12. Двадцать знаменитых задач

Существует много знаменитых задач, чаще всего очень древних, хорошо известных любителям математических развлечений: о богатом арабе, оставшиеся после смерти которого 17 верблюдов по завещанию следует поделить между наследниками в отношении половина : одна треть : одна девятая часть; о черве, проедающем в библиотеке три книги; об улитке, которая пытается выбраться из колодца, поднимаясь днем на 3 м вверх и опускаясь ночью на 2 м вниз; о пауке, который, находясь в обычной комнате, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, хочет добраться до мухи кратчайшим путем; о реке, которую нужно пересечь то пастуху с волком, козой и капустой, то трем ревнивым мужьям с их женами, пользуясь при этом лодкой, слишком маленькой, чтобы вместить всех; о двух поездах, которые должны разъехаться, используя одну стрелку, позволяющую машинистам маневрировать, и один малый тупик, в который вмещается лишь один вагон; о молочнике, который должен удовлетворить запросы двух своих клиентов, желающих получить количество молока, которое, разумеется, не соответствует эталонным мерам, имеющимся у молочника.

Двадцать следующих задач выбраны по чисто эстетическим критериям: все они обладают красивыми решениями. Они характерны для математических развлечений — ведь в «серьезной» математике не принято расставлять решающему капкан и надеяться, что он в этот капкан попадется. В этом отношении наши задачи все сходны между собой; они апеллируют к сообразительности читателя и его интуиции, в чем, собственно, и заключается их ценность.

Все предложенные ниже задачи вполне можно назвать «классическими»: они давно уже кочуют из одного сборника развлекательной математики в другой, так что их авторов, подобно авторам фольклорных литературных произведений, далеко не всегда удается обнаружить. А жаль — ибо речь здесь идет о подлинных произведениях искусства, создателей которых следовало бы знать так же хорошо, как мы знаем творцов знаменитых картин или поэм.



1. ВИНО И ВОДА

В один стакан налито вино, а в другой — такое же количество воды.

Из стакана с вином берут чайную ложку вина и переливают ее в стакан с водой. Затем, как следует перемешав содержимое стакана с водой, берут чайную ложку смеси и переливают ее обратно в стакан с вином.

Чего при этом оказывается больше — вина в воде или воды в вине?

2. ТРИ БЛЮДА

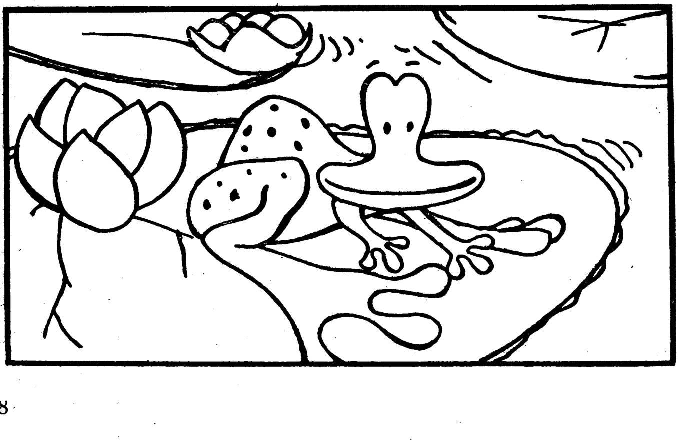
В поезде три пассажира поделились друг с другом своим обедом. У первого из них было пять блюд, у второго — три; третий же не имел ничего, и он дал двум своим попутчикам восемь франков.

Как должны распределить между собой эти восемь франков два первых пассажира, если стоимость каждого из восьми блюд одинакова?

3. КОРОЛЬ И ЕГО ПРЕМЬЕР-МИНИСТР

Король хотел сместить своего премьер-министра — но при этом не хотел его слишком обидеть. Он позвал премьер-министра к себе, положил при нем два листка бумаги в портфель и сказал: «На одном листке я написал «Уходите», а на втором — «Останьтесь». Листок, который вы вытащите, решит вашу судьбу».

Премьер-министр догадался, что на обоих листках было написано «Уходите».



Как же, однако, умудрился он в этих условиях сохранить свое место?

4. КУВШИНКА НА ОЗЕРЕ

Площадь озера, покрываемая одной кувшинкой, каждый день увеличивается вдвое. Через месяц покрытой оказывается вся поверхность озера.

За сколько времени покроют все озеро две растущие кувшинки?

5. КОМНАТА И ТРОЕ ПУТЕШЕСТВЕННИКОВ

Трое путешественников прибыли на постоялый двор, где решили заночевать. Свободной оказалась лишь одна комната с тремя кроватями, за которую хозяин запросил 30 франков. Поэтому каждый путешественник заплатил по 10 франков.

Позднее, подсчитывая выручку, хозяин вспомнил, что за комнату следовало взять не 30, а только 25 франков. Он послал мальчика отнести пять монет по одному франку путешественникам. Но мальчик по ходу дела взял свои чаевые и вручил каждому путешественнику по одному франку, оставив себе два франка.

Итак, каждый путешественник заплатил за ночлег по 9 франков, а два франка мальчик оставил себе.

Но трижды девять плюс два — это 29.

Куда же делся один франк?

6. ПОСЛЕДНЕЕ СЛОВО ОСУЖДЕННОГО

Мир занимательной математики кажется очень благополучным: автомобили никогда не сходят с трассы во время гонок; гребцы не устают даже после многих часов непрерывной гребли, из каждого крана в ванной все время течет постоянная по напору струя воды и т. д.

Но не все в мире устроено так хорошо. Мы не знаем, не использовал ли король более быстрого и действенного (а может быть, и более сурового) способа избавиться от своего премьер-министра после того, как затея с двумя листками бумаги в портфеле (см. задачу 3) провалилась.

Порой люди попадают в критические ситуации, из которых они могут выбраться только благодаря своей сообразительности.

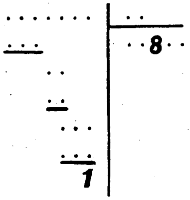
Так, однажды путешественник попал в руки жестокого туземного племени и был поставлен перед дилеммой: умереть от яда или сгореть заживо. Чтобы сделать этот «выбор», бедняга должен был произнести всего одну фразу — если при этом он скажет правду, то его отравят, а если солжет — сожгут заживо.

Как осужденный сумел избежать трагического исхода?

7. ДЕЛЕНИЕ, КОТОРОЕ НУЖНО ВОССТАНОВИТЬ

В следующей задаче на деление «столбиком», найденной в школьной тетради, которая завалялась на старом сыром чердаке, все цифры, кроме двух, стерлись. Единственное, что удалось разобрать,— это места, на которых находились эти стертые цифры.

Не могли бы вы восстановить это деление?



8. МУХА И ДВА ПЕШЕХОДА

Два пешехода движутся навстречу друг другу по прямой дороге — каждый со скоростью 5 км/ч. Первоначальное расстояние между ними — 10 км.

Муха, которая летает со скоростью 14 км/ч, взлетает с первого пешехода, летит по прямой ко второму, садится на него и, не теряя ни секунды, летит обратно к первому пешеходу, потом тут же снова ко второму и т. д.

Какое расстояние проделает муха к тому моменту, когда два пешехода встретятся?

9—10. ТРОЕ ЗАКЛЮЧЕННЫХ И КРУЖКИ[1]

Начальник тюрьмы велел привести трех заключенных и сказал им: «Вот перед вами три белых и два черных кружка. Я повешу каждому из вас на спину по одному кружку, но так, чтобы вы не могли увидеть, какой именно кружок я повесил. Первый из вас, кто определит цвет своего кружка, будет освобожден.

Эту задачу можно поставить двумя разными способами. В первом случае (задача 9) начальник выстраивает трех заключенных «гуськом», так что первый вообще не видит кружки остальных, второй видит кружок на спине первого, а третий — кружки на спинах двух остальных заключенных. Во втором случае (задача 10) заключенные стоят свободно и каждый из них может посмотреть на кружки на спинах двух остальных заключенных.

В каждом случае один из заключенных добился освобождения. Как он это сделал?

11. МЕДАЛИ

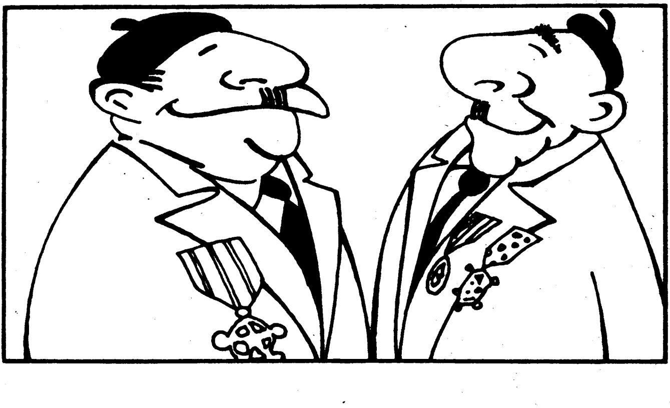
Пятеро друзей купили пять медалей по цене: 5, 25, 125, 625 и 3125 франков. По выходе из лавки у Жана остался лишь 1 франк, у Поля — 2 франка, у Пьера — 3 франка, у Жака — 4 франка и у Клода — 5 франков.

Если сумму, истраченную каждым из них, умножить на оставшуюся у него сумму и сложить эти пять произведений, то всего мы получим 9615.

Сколько заплатил каждый из друзей за свою медаль?

12. ДВЕРЬ СВОБОДЫ

Вот еще одна история про узника, поставленного перед ужасной дилеммой.



Султан, державший узника в заключении, повелел запереть его в темнице вместе с двумя своими верными слугами, один из которых всегда лжет, а другой говорит только правду. В комнате были две двери: «дверь свободы» и «дверь рабства». Дверь, через которую узник захочет выйти из темницы, и решает его судьбу.

Узник имеет право задать только один вопрос одному из двух слуг. Разумеется, узник не знает, который именно из них лжет, а который говорит правду.

Может ли узник безошибочно найти способ выйти на свободу?

13. КЮРЕ И ПОНОМАРЬ

Однажды утром кюре сказал пономарю: «Я встретил трех человек, произведение возрастов которых равно 2450. Сумма трех их возрастов равна удвоенному вашему возрасту. Сколько лет каждому из них?»

После полудня пономарь признался кюре, что не может ответить на его вопрос. Тогда кюре уточнил: «Лишь один из этих трех человек старше меня».

Сколько лет кюре?

14. ДОМИНО НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Имеются шахматная доска с 64 клетками и 32 костяшки домино, каждая из которых покрывает ровно две клетки.

Требуется покрыть доску 31 костяшкой домино, оставив свободными две крайние клетки одной из диагоналей.

15. УРОК И ЗАДАНИЕ УЧЕНИКУ

В следующем сложении «столбиком» каждая буква соответствует определенной цифре от 0 до 9 [1].

$$\begin{array}{r} ELEVE \\ LEÇON \\ \hline DEVOIR \end{array}$$

Восстановите это сложение.

[1] Élève — ученик; leçon — урок; devoir — задание (*франц.*) — *Прим. перев.*

16. ПЛОЩАДЬ ПОЛЯ

Треугольное поле окружено тремя квадратными полями, каждое из которых имеет общую сторону с треугольным. Площади этих квадратных полей равны соответственно 505, 233 и 52 га.

Чему равна площадь треугольного поля?

17. ЗЕБРА

В пяти соседних домах, окрашенных в разные цвета, живут пять человек различных национальностей. У каждого из них есть свое любимое животное, своя манера курить и свой любимый напиток.

Англичанин живет в красном доме.

У испанца есть собака.

Кофе пьют в зеленом доме, который находится рядом с белым домом и справа от него.

Француз любит чай.

У того, кто курит большие сигары, есть попугайчики.

Маленькие сигары курят в желтом доме.

Молоко пьют в среднем доме.

Швед живет в крайнем доме слева.

Тот, кто курит сигареты, живет в доме, соседнем с тем домом, где держат обезьяну.

Тот, кто курит маленькие сигары, живет рядом с владельцем кошки.

Тот, кто курит трубку, пьет апельсиновый сок.

Итальянец вообще не курит.

Швед живет рядом с голубым домом.

Кому принадлежит зебра?

18. ПРОТАЗАН [1]

Во время мировой войны 1914—1918 гг. была обнаружена могила французского солдата, погибшего в последний день месяца на другой войне в чужих краях. Там-то и был найден его протазан.

Произведение дня месяца, указанного на могильном камне, на длину протазана в футах (1 фут=30,48 см), затем на половину числа лет, протекших от кончины солдата до обнаружения могилы, и, наконец, на поло-

[1] Старинное оружие, имеющее вид копья с широким наконечником.— *Прим. перев.*

вину возраста французского главнокомандующего в том походе, где погиб солдат, равно 451 066.

Как звали французского главнокомандующего?

19. ОБМАНУТЫЕ МУЖЬЯ

При дворе одного султана сорок придворных были обмануты своими женами, о чем прекрасно знал весь двор. Но каждый муж, разумеется, не знал об измене своей жены.

Султан повелел позвать к себе этих придворных и сказал им: «По крайней мере одному из вас изменяет жена. Я надеюсь, что, как только он обнаружит это, он изгонит ее из города».

На сороковое утро сорок обманутых придворных изгнали из города своих жен. Почему?

20. «КОРОВЫ НЬЮТОНА»[1]

На луг, где трава растет повсюду одинаково густо и одинаково быстро, выпускают стадо коров.

a коров съедают за b дней всю траву на c акрах луга и весь прирост травы на этих c акрах за эти b дней.

d коров съедают за e дней всю траву на f акрах и весь прирост травы на этих f акрах за эти e дней.

За сколько дней g коров съедят всю траву на h акрах и весь прирост травы за эти дни на этих h акрах, если известно, что все коровы каждый день съедают одинаковое количество травы?

[1] Разумеется, Ньютону принадлежали не коровы, а только задача про них.— *Прим. ред.*

13. Логические парадоксы

Задача о пленнике, который заявил, что он будет сожжен заживо (задача 6 из гл. 12), дает пример порочного круга.

Если мы предположим, что это утверждение истинно, то придем к заключению, что оно ложно. Если же предположить, что оно ложно, то отсюда будет следовать, что оно истинно.

Можно привести многочисленные примеры рассуждений подобного типа.

ВСЕ КРИТЯНЕ — ЛЖЕЦЫ

Один из наиболее древних парадоксов такого типа восходит к античности.

Речь идет об утверждении: «Все критяне — лжецы».

Это невинное на первый взгляд утверждение не заслуживает особого внимания, если его произнесет иностранец. Действительно, здесь возникают две очевидные гипотезы:

либо все критяне действительно лжецы, и в этом случае утверждение истинно;

либо не все критяне лжецы, и тогда оно ложно.

Дело усложнится, если эту фразу скажет житель Крита. Действительно, если это утверждение истинно и все критяне — лжецы, то сам автор высказывания тоже лжец, а значит, он не мог сказать правду и наше утверждение ложно. Если же это высказывание ложно и критяне не лжецы, то наше высказывание должно быть истинным. Как и в предыдущем случае, мы получаем порочный круг.

Однако такое рассуждение не точно. В самом деле, ведь ложность утверждения «все критяне — лжецы» вовсе не означает, что «все критяне не лгут»,— возможно, что всего лишь «не все критяне лгут».

Поэтому данный житель Крита солгал. Но здесь нет никакого парадокса, ибо каждый отдельно взятый житель Крита может как солгать, так и сказать правду.

В некоторых логических задачах, как, например, в задаче про «дверь свободы» (задача 12, гл. 12), встречаются чисто сказочные персонажи: одни из них *всегда* говорят только правду, другие же *постоянно* лгут. Подобного рода оговорки подразумеваются и в парадоксе с критянами — и лишь тогда мы получаем в самом деле парадокс.

Парадокс с критянами можно объяснить и по-другому.

В обществе, все члены которого постоянно лгут, никто *никогда* не скажет, что члены этого общества постоянно лгут, поскольку это правда.

Если все критяне — лжецы и их попросят сказать свое мнение на эту тему, то они дружно ответят, что все критяне говорят только правду. Тем более критяне скажут, что все они говорят правду, если это действительно так. Поэтому само утверждение, что критянин сказал «все критяне — лжецы», невозможно.

Мы видим, что даже относительно простое утверждение может таить в себе свое отрицание, может приводить к «противоречию».

Этот момент становится особенно важным в математике и логике, где рассуждения проводятся лишь в рамках непротиворечивых теорий. Как только в теории обнаружатся два «доказуемых» противоречивых предложения (т. е. предложение A, которое оказывается истинным вместе со своим отрицанием — предложением «не A»), все здание теории рушится. В частности, логические рассуждения, используемые в противоречивой теории, не приводят ни к чему.

У ВСЯКОГО ПРАВИЛА ЕСТЬ ИСКЛЮЧЕНИЕ

У всякого правила есть исключение.

Но предыдущее утверждение — правило.

Значит, у него есть исключение.

Следовательно, не у всякого правила есть исключение.

Четыре предыдущие фразы противоречивы. Мы начинаем с некоего утверждения и приходим к его отрицанию.

В чем причина этого противоречия? Она в начальной фразе «у всякого правила есть исключение». Можно сделать вывод, что это утверждение заведомо ложно.

В самом деле, если это утверждение истинно, то мы приходим к тому, что оно ложно. Напротив, если это утверждение ложно, то, значит, есть правила, у которых нет исключений, и мы не получаем никакого противоречия.

Таким образом, истина состоит в том, что имеются правила, у которых нет исключений.

ДАННОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ ЛОЖНО

Мы довольно легко проанализировали два предыдущих парадокса и нашли, где скрывается истина. Но гораздо большие тонкости содержатся в парадоксе: «Данное утверждение ложно».

Мы можем рассмотреть две гипотезы:

либо данное утверждение ложно; но поскольку оно ложно, то получается, что оно истинно;

либо данное утверждение истинно. Но тогда оно ложно.

На этот раз нам не удастся избежать порочного круга. Если утверждение ложно, то оно истинно, а если оно истинно, то оно же ложно. Что можно вывести отсюда, кроме того, что данное утверждение не истинно и не ложно?

Возьмем другой пример:

Следующее утверждение ложно.

Следующее утверждение истинно.

Следующее утверждение ложно.

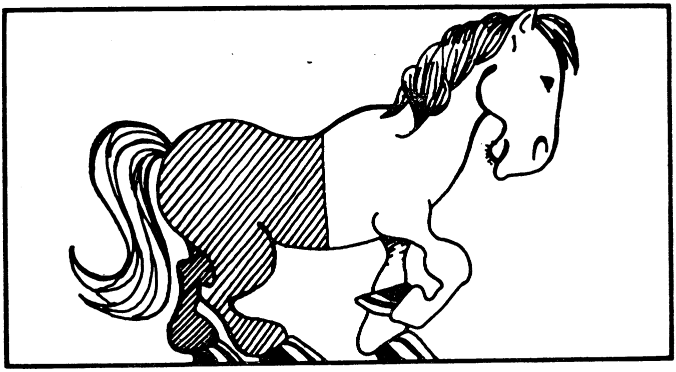
Следующее утверждение истинно.

Первое утверждение ложно.

Если первое утверждение истинно, то второе утверждение ложно. Но это значит, что ложно и третье утверждение. Следовательно, четвертое утверждение истинно — а значит, истинно и пятое утверждение, т. е. первое утверждение ложно.

Если же первое утверждение *ложно*, то второе, а значит, и третье утверждения *истинны*. В этом случае четвертое утверждение ложно, т. е. ложно и пятое утверждение,— а поэтому первое утверждение *истинно*.

Этот парадокс на первый взгляд более запутан, чем предыдущий, поскольку в нем содержатся пять утверждений вместо одного. Но он приводит к тому же выводу: начиная с утверждения *A*, которое мы



считаем истинным, мы приходим к выводу, что утверждение «не A», т. е. отрицание A, тоже истинно. Значит, множество наших утверждений противоречиво — и из него нельзя вывести ничего путного.

Можно исследовать несколько простых примеров с утверждениями истинными, ложными или противоречивыми.

Рассмотрим следующее утверждение: *«Лошадь Жана — черная»*.

Возможно одно из двух: либо лошадь Жана действительно черная, и тогда это утверждение истинно; либо же она не черная, и тогда наше утверждение ложно.

Но как обстоит дело с утверждением: «Черная лошадь Жана — белая»?

Первая часть этой фразы говорит нам о том, что лошадь Жана черная, а вторая часть — что эта лошадь белая.

Дабы избежать в этом парадоксе возможности прибегнуть к какой-нибудь увертке, добавим, что здесь речь не идет о черной лошади с белыми пятнами, и уточним наше утверждение следующим образом: «Совершенно черная лошадь Жана совершенно бела»

Хотя с точки зрения грамматики эта фраза составлена безукоризненно, логически она бессмысленна (противоречива).

Даже если лошадь Жана окажется белой, мы не можем сказать, что данное утверждение истинно, поскольку в нем речь идет о черной лошади. Но мы также не можем сказать, что оно ложно. Можно лишь заметить, что эта противоречивая фраза никакой информации нам добавить не может. Поэтому бесполезно обсуждать ее далее, над ней можно лишь посмеяться. Или сухо констатировать, что эта фраза внутренне противоречива,— вот и все.

К тому же типу принадлежит и фраза «данное утверждение ложно». Парадокс состоит в том, что это утверждение внутренне противоречиво; из него можно вывести с равным успехом и *А*, и «не *А*».

Но почему именно противоречиво это утверждение?

Мы уже видели, что если все критяне — лжецы, то ни один из них не скажет, что все критяне — лжецы.

Точно так же никто, оставаясь в рамках строгой, привычной нам логики, не сформулирует противоречивое утверждение.

Как в обычной жизни никто, находясь в здравом уме и твердой памяти, не скажет «черная лошадь Жана — белая», так и в мире логики никто не скажет «данное утверждение ложно». Парадокс основан лишь на том, что нелогичный характер этого утверждения менее очевиден, чем в случае с черной лошадью.

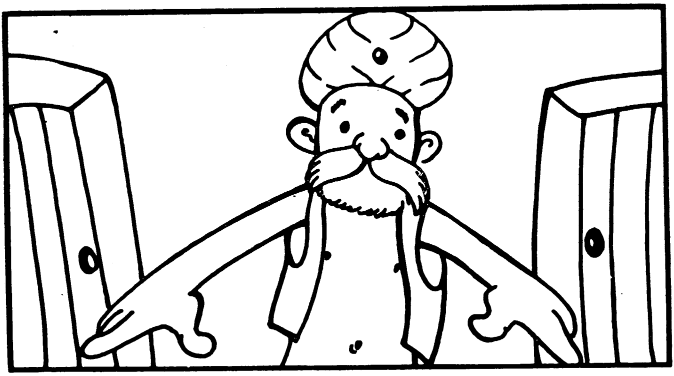
После этих предварительных примеров мы можем взяться за две более трудные задачи. Одна из них — это модифицированный вариант «двери свободы» (см. задачу 12 из гл. 12), а вторая — это так называемый «парадокс повешенного».

ДВЕРЬ СВОБОДЫ, НОВЫЙ ВАРИАНТ

В данном варианте султан помещает узника в темницу с двумя дверями — «дверь свободы» и «дверь рабства», но теперь вместе с узником находится лишь **один** человек — скажем, слуга султана.

Этот слуга либо всегда говорит правду, либо всегда лжет, либо иногда говорит правду, а иногда лжет. При этом слуга — аккуратист и логик; он всегда использует лишь строгие «логические» высказывания, для которых можно однозначно определить, истинно ли данное утверждение или ложно; противоречивыми высказываниями слуга **никогда** не пользуется.

Узник имеет право задать слуге один и только один вопрос.



Может ли он с уверенностью определить «дверь свободы», заранее, разумеется, не зная, лжет ли слуга или говорит правду?

В аналогичной задаче из предыдущей главы фигурировали **двое** слуг, один из которых всегда лгал, а другой всегда говорил правду. Поэтому утверждение, которое делает один слуга, ссылаясь на другого, обязательно ложно.

Теперь у нас только один слуга. Поэтому каким бы ни был заданный вопрос, узник как будто никак не сможет определить, правдив ли ответ на этот вопрос,— и, следовательно, не сможет определить «дверь свободы» с уверенностью.

Однако не следует торопиться. Нет ли ошибки в этом выводе? К обсуждению данной ситуации мы вернемся в конце главы.

ПАРАДОКС ПОВЕШЕННОГО

Одного человека приговорили к казни через повешение.

Однажды воскресным утром судья, который никогда не лгал, сказал ему: «Вы будете повешены в один из дней на следующей неделе. Когда именно вас повесят, вы узнаете только утром в день вашей казни».

Вернувшись в свою камеру, узник задумался и стал рассуждать следующим образом.

Меня не могут повесить в следующее воскресенье, поскольку в противном случае я буду знать об этом не воскресным утром, а уже в субботу вечером — ведь других дней недели, кроме воскресенья, уже не останется. Но правдивый судья сказал, что я узнаю о дне казни только утром этого дня. Значит, меня никак **не могут** повесить в воскресенье; другими словами, последний день, когда может совершиться казнь,— это суббота. Но и в субботу меня повесить тоже не могут, ибо поскольку я знаю, что в воскресенье меня не повесят, то если в пятницу утром ко мне не придут с объявлением о казни, в пятницу вечером я буду твердо знать, что меня повесят в субботу. Однако правдивый судья сказал, что о дне казни я узнаю лишь утром дня казни, а не накануне вечером. Значит, в субботу меня повесить **не могут** — и последним возможным днем казни становится пятница.

Так рассуждая, осужденный исключил последовательно пятницу, четверг, среду, затем вторник и, наконец, понедельник. В результате он пришел к выводу, что его вообще не могут повесить, поскольку ни один день недели не удовлетворяет условиям, сформулированным судьей.

Мы столкнулись здесь с первым парадоксом: человек, который всегда говорит правду (судья), формулирует предписание, выполнить которое невозможно.

Но история еще не закончена. На самом деле во вторник утром осужденного совершенно неожиданно для него предупредили, что его сегодня днем повесят. В силу сказанного выше он этого не ожидал — и, значит, условие судьи было полностью выполнено. В то время как чисто логически приговор был невыполнимым, в действительности именно из-за этой невыполнимости его удалось выполнить, соблюдая названное честным судьей условие. Этот парадокс, впервые сформулированный около тридцати лет назад, буквально утонул в море чернил. Для него было предложено много разных объяснений — но ни одно из них нельзя признать удовлетворительным.

Чтобы проанализировать этот парадокс, попытаемся поставить задачу более четко. Для этого мы дадим судье двух помощников: *В* (он в дальнейшем будет вытягивать шары) и *О* (этот будет открывать ящики с шарами). Кроме того, дабы поставить задачу во всей ее общности, отныне мы будем считать, что возможных дней казни имеется не 7, а n, где n — **произвольное** (целое положительное) число.

Прежде всего обсудим, как именно выбирает судья день казни.

Первый помощник судьи, B, ведает принадлежностями, позволяющими выбирать день казни «случайным образом», а именно:

мешком, в котором находится один черный шар и $n-1$ белых шаров (всего n шаров);

n закрытыми ящиками, пронумерованными от 1 до n.

Чтобы определить день казни, B вытягивает наудачу шары из мешка и помещает их последовательно в ящик 1, затем в ящик 2 и т. д.

После этого в дело вступает второй помощник судьи, O, который открывает сначала ящик 1, затем ящик 2 и т. д., пока не обнаружит черный шар. Если черный шар окажется, например, в ящике 6, то казнь совершится в **шестой** день.

Заметим, что эта новая задача не полностью эквивалентна предыдущей, поскольку ранее не говорилось, что судья выбирает день казни случайным образом. Но здесь речь идет о важном для нашего обсуждения моменте, который необходимо учесть, оговорив специально, поступает или не поступает подобным образом судья при выборе дня казни.

Кроме того, нам также предстоит исследовать влияние числа n дней, в которые возможна казнь.

Можно заметить, что в первоначальной формулировке парадокса это число — а именно 7 — выбрано очень удачно.

Будь это число меньше, нам легче было бы разобраться в решении. Будь оно слишком большим, это сделало бы менее очевидным сам парадокс.

Перед тем как начать довольно сложный анализ данного парадокса, уточним, что наши рассуждения не во всех случаях поведут читателя дорогой истины. Только раздел, озаглавленный «Решение парадокса», содержит рассуждение, представляющееся нам безошибочным.

Начнем со случая, когда есть лишь **один** день, в который возможна казнь. Задача в этом случае формулируется так:

судья всегда говорит правду;

судья говорит осужденному: вы будете повешены завтра;

судья говорит осужденному: вы не узнаете о дне своей казни до завтрашнего утра.

Очевидно, что здесь второе и третье утверждения противоречивы. Парадокс в данном случае объясняется так же легко, как и в случае фразы «данное утверждение ложно». Речь просто идет об условии, сформулированном настолько противоречиво, что из него ничего нельзя вывести, поскольку правила логики здесь нарушены.

Обратимся в этом случае к языку шаров. Судья говорит осужденному: «В ящике лежит один черный шар; вы не узнаете, что в ящике лежит черный шар, пока не откроете ящик».

Вновь противоречие сразу бросается в глаза.

Вспомним теперь, как рассуждал приговоренный, чтобы сделать очевидными два вывода, которые тривиальны в рассматриваемом нами случае и которые будут повторены и далее, при рассмотрении общего случая.

Осужденный может сказать: судья, который всегда говорит правду, утверждает, что я не смогу узнать, где находится черный шар, до того, как открою ящик. Но это означает, что черного шара в ящике нет; в то же время тот же правдивый судья говорит, что черный шар там есть.

Первый вывод состоит в напоминании о том, что это рассуждение основано на одновременной «истинности» двух противоречивых утверждений, из которых нельзя вывести ровно ничего, кроме того, что информация наша **ничего** не стоит,— и, значит, черный шар может как быть в ящике, так и не быть.

Кроме того, обратимся к изложенному выше концу этой истории. Судья открывает ящик. Там лежит черный шар. Осужденный не знал, лежит ли в ящике черный шар или нет, ибо противоречивое высказывание судьи он вообще не мог никак учитывать. Значит, оба утверждения судьи оказались верными. Можно думать, что таким образом нам удалось избежать противоречия.

Именно потому, что утверждения судьи противоречивы, осужденный и не может сказать с уверенностью, есть ли в ящике черный шар или нет. И отсюда напрашивается второй вывод: из трех основных утверждений задачи именно первое оказывается ложным: судья не всегда говорит правду.

Получилось так, что на этот раз он сказал правду. Но поскольку он говорит ее не всегда, осужденный не может ничего вывести из двух утверждений судьи.

Ведь если предположить, что судья **всегда** говорит правду, то эти два утверждения становятся противоречивыми. Но поскольку судья не всегда говорит правду, в ящике может оказаться черный шар, а заключенный тем не менее не будет знать с уверенностью, так ли это или нет, т. е. слова судьи о том, что до того, как ящик будет открыт, подсудимый о его содержании не узнает,— это правда.

Исследуем теперь случай, когда возможных дней **два**, и, значит, мы будем иметь дело с двумя ящиками и двумя шарами — белым и черным.

Поскольку шары вытягиваются из мешка случайным образом, есть один шанс из двух, что черный шар окажется во втором ящике.

Если бы второй помощник, *О*, открывал оба ящика одновременно, судья мог бы, очевидно, сказать, что осужденный не узнает местоположение черного шара до того, как ящики будут открыты.

Но ящики открываются последовательно. Поэтому если в ящике 1 не окажется черного шара, то заключенный будет знать, что он лежит в ящике 2, еще до того, как этот ящик откроют.

Здесь снова условия задачи оказываются противоречивыми.

В более общем виде мы можем рассуждать следующим образом.

Если n шаров вынимают случайным образом и помещают в n ящиков, то существует один шанс из n, что черный шар окажется в последнем ящике. Следовательно, судья никак не может утверждать, что осужденный ни в коем случае не узнает, где находится черный шар, до того, как ящик с этим шаром не будет открыт. Условия задачи вновь оказываются противоречивыми.

Напротив, если судья сам выбирает местоположение черного шара, то он может сформулировать свои утверждения непротиворечивым образом.

Например, при $n=365$ судья может выбрать один из дней восемнадцатой недели, не давая осужденному никакого повода предпочесть этот день какому-либо другому.

В случае когда судья выбирает местоположение черного шара сам, объяснение парадокса меняется в зависимости от числа шаров.

В случае **одного** шара объяснение такое же, как и ранее: судья формулирует задачу с противоречивыми условиями, и более о ней нечего говорить, как нечего говорить о «черной лошади, которая является белой».

В случае **двух** шаров судья утверждает, что:

в одном из двух ящиков лежит черный шар;

два ящика будут открыты последовательно;

осужденный не сможет узнать, где находится черный шар, прежде чем не откроют ящик, где он лежит.

Осужденный тогда будет рассуждать следующим образом:

если черный шар находится в ящике 2, то я узнаю об этом до того, как откроют ящик 2, поскольку увижу белый шар в ящике 1;

значит, черный шар не может находиться в ящике 2;

следовательно, он находится в ящике 1;

но если он находится в ящике 1, то, значит, мне известно об этом до того, как этот ящик будет открыт.

Следовательно, предписание судьи невыполнимо.

В первоначальном варианте истории осужденный решил, что его вообще никогда не повесят.

В данном примере его вывод состоит в том, что в двух ящиках вообще нет черного шара.

Что можно вывести отсюда? Что судья сформулировал противоречивое предписание? Что рассуждения приговоренного ложны? Данный пример особенно прост, поскольку есть только два ящика. Условия задачи не кажутся двусмысленными. Однако парадокс здесь все-таки возникает.

Условия судьи ясны. Предположим, что в них нет противоречия, и вновь шаг за шагом проследим за рассуждениями приговоренного. Черный шар не может оказаться в ящике 2, поскольку в противном случае осужденный знал бы об этом до того, как откроют ящик 2, а именно сразу же после того, как будет открыт ящик 1

Поскольку судья говорит правду, в одном из ящиков находится черный шар. А поскольку речь никак не может идти о ящике 2, то, значит, речь должна идти о ящике 1.

Следовательно, осужденный заранее знает, что черный шар находится в ящике 1. Но это противоречит третьему утверждению судьи; значит, условия задачи противоречивы.

Как и в случае $n=1$, решение парадокса состоит в том, что судья не всегда говорит правду. На этот раз его утверждения оказались справедливыми. Но поскольку он не всегда говорит правду, то осужденный не сможет построить свое рассуждение так, чтобы прийти к утверждению, истинность которого удалось бы установить заранее.

Источник противоречия здесь приходится искать в утверждениях судьи.

О чем, строго говоря, идет речь? О событии, состоящем в том, что последовательно открывают два ящика, в которых находится один белый и один черный шар. Не известно, где именно находится каждый шар,— и мы хотели бы это обнаружить.

Местоположение шаров становится известным *после вскрытия первого ящика.* С этого момента интересующее нас событие можно считать полностью реализованным — а по смыслу задачи судья вынуждает осужденного делать предсказание *после* вскрытия первого ящика, т. е. после того, как событие уже реализовалось.

Значит, поставленная судьей задача не имеет смысла.

Задержимся на этой стадии анализа, чтобы осознать крайнюю сложность рассматриваемого парадокса.

Решение будет различно в зависимости от того, определяется ли положение черного шара *случайным образом* или *выбирается судьей.*

В первом случае условия задачи противоречивы.

Во втором случае, при $n=1$, условия задачи тоже противоречивы.

При $n=2$ условия, поставленные судьей, не имеют смысла.

При $n=365$ судья действительно может выбрать ящик, не давая осужденному возможности узнать его номер заранее, и, следовательно, ложны именно рассуждения осужденного.

Подвергнем теперь столь же тщательному анализу случай, когда имеются **три** ящика.

Судья утверждает, что:

два белых и один черный шар находятся в трех ящиках, пронумерованных номерами от 1 до 3; эти ящики открывают последовательно один за другим;

осужденный не сможет узнать, где именно находится черный шар, до того, как будет открыт ящик, в котором этот шар находится.

Пользуясь теми же рассуждениями, что и в исходном варианте задачи, осужденный делает вывод, что черный шар не может находиться ни в ящике 3, ни в ящике 2, ни, наконец, в ящике 1 — и, следовательно, что черного шара вообще нет ни в одном из ящиков.

Проанализируем это рассуждение, как и ранее, отправляясь от предположения, что в утверждениях судьи нет противоречий, точнее говоря, считая, что в одном из трех ящиков действительно находится черный шар

Местоположение черного шара наверняка становится известным после открытия ящика 2. Следовательно, судья не может положить черный шар в ящик 3 — и осужденному это известно.

Значит, судья может положить черный шар либо в ящик 1, либо в ящик 2.

Если он положит шар в ящик 2, то, после того как откроют ящик 1, все сведется к предыдущему случаю — и осужденному станет известно, что черный шар находится в ящике 2.

Обязан ли теперь судья положить черный шар в ящик 1? Если бы это было так, то мы вновь пришли бы к выводу, что это заранее известно осужденному,— и условия задачи окажутся противоречивыми.

Но проведенный таким образом анализ, совпадающий с тем, который проводился в исходном варианте парадокса, не полон, ибо учитывает лишь рассуждения приговоренного к казни.

В случае когда осужденный знает, что судья говорит правду, он уверен, что черный шар **не находится** в ящике 3. Поэтому в момент, когда ящик 1 уже открыт и в нем обнаружен белый шар, осужденному станет известно, что черный шар находится в ящике 2.

Но давайте рассмотрим момент **перед тем**, как откроют ящик 1. Что может сказать осужденный? Он знает, что имеется черный шар и что он находится не в ящике 3. Но может ли он утверждать, что этот шар лежит скорее в ящике 1, чем в ящике 2?

Предположим, что речь идет об игре с двумя участниками, одного из которых назовем «судьей», а другого — «осужденным». Судья требует, чтобы осужденный предсказал, в каком из трех последовательно открываемых ящиков находится черный шар. Как представить себе эту игру? В начале партии, т. е. *до открытия ящика 1,* судья требует, чтобы осужденный сказал, где находится черный шар. Если осужденный укажет на ящик 1 и если его предсказание не подтвердится, то потребует ли судья нового предсказания (и так до тех пор, пока черный шар не будет найден) или мы будем считать, что осужденный проиграл партию и следует начать новую?

Другими словами:

Будет ли осужденный прежде всего утверждать, что черный шар находится в ящике 1?

Затем, если он ошибся, то позволит ли ему судья утверждать, что черный шар находится в ящике 2?

Наконец (почему бы и нет?), если это снова окажется неверным, то позволит ли судья ему утверждать, что черный шар находится в ящике 3?

В этом случае становится ясным решение парадокса, которое можно дать двумя разными способами:

1) условия задачи, поставленной судьей, двусмысленны. Судья требует от осужденного, чтобы тот сформулировал предсказание: уточняя, что осужденный не сможет определить положение черного шара, судья требует, чтобы он его постарался найти. И он, по сути, позволяет ему делать то, что не имеет смысла,— формулировать многочисленные предсказания в случае, если первые окажутся ложными;

2) рассуждение приговоренного проходит только в том случае, если допустить, что он может делать многочисленные последовательные проверки, касающиеся местоположения черного шара.

В самом деле, осужденный не может быть уверен, что черный шар находится в ящике 1, до того, как этот ящик будет открыт.

Окончательно, ключ к парадоксу двойствен:

судья ставит задачу, условие которой с логической точки зрения лишено смысла;

осужденный строит свои рассуждения, основываясь на утверждениях судьи (которые, будучи алогичными, не могут привести ни к чему или, если вам так удобнее считать, могут привести к чему угодно), интерпретирует двумя различными способами слово «ожидаемый»; наконец, его рассуждения неполны.

Судья говорит, что событие будет «неожиданным». Но что мы понимаем под «ожидаемым»? Ожидаем ли мы, что черный шар окажется в некотором ящике, до того, как этот ящик будет открыт? Или мы ожидаем, что он находится в одном из ящиков, до того, как будет открыт первый ящик? Рассуждения приговоренного неполны именно потому, что он не задумывался над вопросом о том, что происходит до того, как открывают первый ящик. Учитывая, что условия задачи, поставленной судьей, сами неполны и нелогичны, этот дефект рассуждений легко просмотреть.

Но ситуация существенно меняется, когда n достаточно велико. Например, если число шаров равно 365, то задача, поставленная судьей, вполне осмысленна. Ее условия корректны и не противоречивы. Как мы уже говорили, ему достаточно, например, выбрать один из дней на восемнадцатой неделе (если перейти к назначению дня казни), чтобы три соответствующих утверждения стали справедливыми.

Напротив, рассуждения приговоренного, согласно которым черный шар не может оказаться на 365-м месте, затем на 364-м месте, затем на 363-м месте и т. д., ложны. Его рассуждения на самом деле приводят к выводу, что черный шар находится в ящике 1 и что там его и следует ждать. Затем если в ящике 1 черного шара не окажется, то его следует ожидать в ящике 2, потом в ящике 3 и т. д. Другими словами, осужденный не может точно сказать, есть ли в данном ящике черный шар, до того, как этот ящик будет открыт. Сумма соответствующих ожиданий приводит лишь к абсолютной уверенности в том, что черный шар находится в одном из 365 ящиков — но это-то мы ведь знали с самого начала.

Новая задача. Таким образом, мы оказались перед лицом новой проблемы. Когда число шаров мало, условия задачи, поставленной судьей, не имеют смысла.

Напротив, когда число шаров велико, условия поставленные судьей, имеют смысл, а неверными оказываются рассуждения приговоренного.

При каком числе шаров[1] совершается переход от первого случая ко второму?

Вторая задача. А теперь — вторая задача. После того как мы далеко продвинулись в изучении данного парадокса, после того как мы сочли его уже практически решенным, если мы попытаемся провести рассуждение по индукции, то вновь столкнемся с этим парадоксом, возродившимся из пепла и еще более изощренным, чем раньше.

Пусть мы уже показали, что при m шарах задача, поставленная судьей, не имеет смысла. Что будет, если мы возьмем $m+1$ шар?

Приговоренный может рассуждать следующим образом:

если бы черный шар оказался в одном из m последних ящиков, задача, поставленная судьей, не имела бы смысла;

значит, если эта задача имеет смысл, черный шар должен оказаться в ящике 1;

итак, я знаю, что черный шар лежит в ящике 1; но это противоречит утверждению судьи, согласно которому я не смогу узнать, в каком ящике лежит черный шар, до того, как этот ящик будет открыт;

следовательно, и при числе шаров, равном $m+1$, условия задачи, поставленной судьей, противоречивы.

Но мы уже видели, что при $n=2$ и $n=3$ задача, поставленная судьей, смысла не имеет. Значит, она не имеет смысла ни для $n=4$, ни для $n=5, 6, \ldots$ Таким образом, мы приходим к выводу, что утверждения судьи противоречивы и при $n=365$,— а ранее мы говорили, что при этом значении n задача имеет смысл.

---

[1] Другими словами, мы приходим здесь к варианту античного «парадокса кучи»: при каком числе n камней их совокупность становится «кучей»? Ясно, что это неверно при $n=1$ — и верно при очень большом n; где же то n, при котором прибавление **одного камня** к совокупности n камней обращает эту совокупность в кучу? — *Прим. ред.*

Третья задача. Не будем останавливаться на пути. Здесь решение как горизонт: чем ближе мы к нему подходим, тем более удаленным от нас оно нам кажется. Сейчас мы покажем, сформулировав по-иному вторую задачу, что ответ на первую задачу получить нельзя.

Предположим, что мы решили первую задачу и нашли нужное число m, т. е. такое, что если число шаров меньше или равно m, то условия задачи, поставленной судьей, противоречивы, а если это число больше m, то ошибочными оказываются рассуждения приговоренного к казни. Изучим, что происходит в случае $m+1$ шара. Приговоренный рассуждает следующим образом:

если судья положил черный шар в один из последних m ящиков, то все сводится к предыдущему случаю и задача, поставленная судьей, не имеет смысла;

это значит, что черный шар находится в ящике 1 и мне это заранее известно; но это противоречит одному из утверждений судьи.

Таким образом, мы видим, что искомое число m существовать **не может.**

Вторую задачу решить легко. На каждом этапе нашего рассуждения по индукции мы приходим к выводу, что черный шар находится в ящике 1. Здесь снова сумма 365 ожиданий при каждом открывании ящика приводит — всего-то! — к абсолютной уверенности, что черный шар находится в *каком-то* из 365 ящиков.

Решение третьей задачи менее очевидно. В том рассуждении, которое мы проводили, концы с концами не сходятся. Действительно, мы предполагаем вначале, что при $m+1$ шаре утверждения судьи не противоречивы, что они имеют логический смысл. Тем самым мы предполагаем, что способ, которым судья разрешает осужденному определять положение черного шара, отвечает законам логики.

Это очевидно в случае 365 шаров, но менее очевидно, когда шаров всего два или три.

В приведенном выше анализе третьей задачи мы

в первой части рассуждения не имеем права предполагать, что судья требует от осужденного, чтобы тот определил положение черного шара «чисто логически», т. е. до того, как будет открыт ящик 1 (а именно это мы делали, уточняя, что при $m+1$ шаре утверждения судьи истинны);

во второй части рассуждения не можем предполагать, что осужденный в состоянии определять положение черного шара с помощью каких-то других правил (а именно это мы делали, считая, что если осужденный решил, что черный шар — в первом ящике, и при этом он ошибся, то все сводится к предыдущей задаче с m шарами).

Теперь осталось решить первую задачу, что позволит нам прийти к окончательному выводу и найти решение парадокса.

Во всяком случае, нельзя надеяться устранить парадокс, если мы не предположим, что осужденный определяет предполагаемое положение черного шара чисто логическим путем, формулируя свое предсказание **только один раз** — еще до того, как будет открыт ящик 1.

При этих условиях решение первой задачи очевидно: переход от первого типа ответа ко второму происходит при *двух* шарах.

Когда имеется только **один** шар, утверждения судьи противоречивы.

Когда шаров **два** или **больше двух**, то:

либо мы считаем, что законы логики применимы и к утверждениям судьи, и к рассуждениям приговоренного. В этом случае осужденный должен выбрать один из двух ящиков *до того, как будет открыт первый ящик.* Здесь нет больше никакого парадокса, поскольку у осужденного нет никаких оснований предпочесть один ящик другому;

либо в противном случае, когда осужденный может выбирать один или более ящиков последовательно делать заключения вне пределов строгой[1] логики,- здесь мы и приходим к парадоксу.

---

[1] Под «строгой» логикой здесь понимаются логические конструкции, где на всякий вопрос может быть лишь два взаимно исключающих друг друга ответа — «истинно» и «ложно». Напротив, в случае большого числа шаров и последовательных попыток предсказания со стороны осужденного мы находимся в условиях, близких к так называемой «вероятностной» логике, где *истинность* (или *вероятность*) высказывания оценивается числом p в пределах $0 \leqslant p \leqslant 1$ (если $p = 1$, высказывание «строго» истинно, если $p = 0$, оно «строго» ложно): но законы этой «серой», или «размытой», логики не совпадают с законами «чистой» (или «строгой, или, как иногда также говорят «черно-белой», логики).— *Прим. ред.*

Точно так же в исходной постановке, когда есть только **один** возможный день, утверждения судьи противоречивы, ибо он на самом деле говорит:

вы будете повешены завтра;

вы не узнаете до завтрашнего утра, что будете повешены завтра.

Исследование случая, когда имеются **два** возможных дня, позволяет в последний раз возродить парадокс из пепла.

На самом деле можно сказать, что между задачей с шарами и задачей о казни через повешение нет полной аналогии.

В первоначальной версии судья говорит:

вы будете повешены завтра или послезавтра;

вы не сможете узнать день, когда вас повесят, раньше утра этого дня.

Условия ясны. Если утром первого дня осужденному не скажут, что его повесят в этот же день, то вечером он уже будет знать, что его повесят завтра. Значит, утверждения судьи противоречивы, и мы вновь возвращаемся к трем последним задачам.

При $n=2$ не только рассуждения приговоренного ложны, но равным образом противоречивы и утверждения судьи.

При $n=365$ ложны лишь рассуждения приговоренного. При каком n происходит переход от одной ситуации к другой?

Чтобы лучше показать, что этот экстравагантный парадокс присутствует *всегда* и что мы как будто ни на йоту не продвинулись в его анализе, представим парадокс по-новому, отказываясь от всяких ссылок на шары и ящики.

Последняя формулировка парадокса. Когда число возможных дней равно **двум**, то кажется бесспорным, что утверждения судьи противоречивы.

Судья не может выбрать второй день. Значит, он должен выбрать первый день — и осужденному это известно, что противоречит последнему утверждению судьи.

Напротив, когда имеется **семь** возможных дней, судья может выбрать один из двух либо из трех или даже четырех первых дней.

У осужденного нет относительно дня казни ни малейшей уверенности. Если бы судья выбрал первый день, то с помощью каких рассуждений (кроме ложных, как нам известно) смог бы осужденный определить, что его скорее повесят в первый день, чем во второй? Точно так же если его не повесили в первый день, то на основании чего он выберет второй день, а не третий?

Когда возможных дней семь, судья говорит правду Его утверждения точны, непротиворечивы: у осужденного нет ни малейшей уверенности относительно дня казни вплоть до утра этого самого дня, как и сказал ему судья.

Напротив, рассуждения приговоренного, которые приводят к выводу, что его вообще не повесят, ложны, так как в них предполагается, что осужденный может семь раз последовательно с уверенностью сказать, что его повесят в тот же самый день.

Мы вновь возвращаемся к трем предыдущим задачам.

Если в случае двух дней решение парадокса состоит в том, что утверждения судьи противоречивы, и если в случае семи дней решение заключается в том, что утверждения судьи истинны и что, напротив, ложны рассуждения приговоренного, то в случае какого числа дней мы переходим от одного решения к другому? В случае трех дней? В случае четырех дней?

В случае трех дней судья не может выбрать два последних дня, не сведя все к задаче с двумя днями, в которой утверждения судьи противоречивы. Значит, он должен выбрать первый день — и осужденному это известно.

Следовательно, утверждения судьи в случае трех дней противоречивы.

Рассуждая таким же образом, можно показать, что так же обстоит дело и в случае четырех, пяти и т. д. возможных дней.

Теперь самое время сделать окончательные выводы и для этой последней формулировки парадокса.

Решение парадокса. Опять мы заключаем, что в рассуждениях, проводимых в обоих случаях (в случае двух дней и в случае семи дней), концы с концами не сходятся.

В случае двух дней мы с необходимостью считаем, что осужденный решит сначала, что его повесят в первый день, а затем, если этого не произошло, что его повесят во второй день.

В случае семи дней здравый смысл приводит нас к логически более удобному допущению, что у осужденного нет оснований для того, чтобы выбрать скорее первый день, чем второй. Самое большее, что может сделать осужденный, это оставаться внутренне убежденным, что его повесят завтра. Это убеждение все более и более возрастает по мере того, как проходит время[1],— однако оно не может превратиться в абсолютную уверенность, если судья выберет один из двух-трех первых дней.

И даже если ничего не произойдет в три первых дня, то осужденный вечером третьего дня не сможет быть абсолютно уверен, что его повесят завтра.

Окончательно, решение парадокса состоит в следующем.

Когда возможных дней **один**, условия задачи противоречивы. Осужденный не может из них вывести *ничего.*

Судья не всегда говорит правду. В данном случае он может сказать или не сказать правду. Осужденного, может быть, повесят, но, может быть, этого и не произойдет. Но если даже его повесят, то это вовсе не будет означать, что судья всегда говорит правду,— отсюда будет лишь следовать, что он сказал правду на этот раз.

Когда возможных дней **два** (или более), то, как в случае с шарами,

1) либо мы решим, что законы логики применимы как к утверждениям судьи, так и к рассуждениям приговоренного. В этом случае для семи дней, как и для двух, мы должны считать, что вывод относительно дня казни осужденный должен сделать на заре первого дня. При этих условиях даже в случае двух дней больше нет никакого парадокса, ибо у осужденного нет оснований для того, чтобы выбрать первый, а не второй день. Видимость парадокса связана лишь с неправильными рассуждениями приговоренного;

---

[1] Вспомните сказанное в примечании на с. 82 о «вероятностной» логике и о «мере» (вероятности) p истинности данного высказывания — здесь утверждается, что с течением времени эта мера p все время возрастает.— *Прим. ред.*

2) либо мы допускаем, что у осужденного вначале может быть абсолютная уверенность в том, что его повесят в первый день, затем, когда это не подтвердится, что его повесят на следующий день и т. д. В этом случае, будет ли два, семь или более дней, мы приходим к парадоксу. Решение этого парадокса состоит в том, что утверждение судьи (или, скорее, наша интерпретация его утверждений) противоречиво.

В последней формулировке парадокса, таким образом, ставилась ложная задача. Утверждения судьи — при не совсем строгой, но разумной их интерпретации — противоречивы лишь в случае одного дня

Когда возможных дней два или более, интерпретация утверждения судьи, согласующаяся с законами логики, приводит к выводу, что ложными оказываются рассуждения приговоренного к казни. Этим подтверждается вывод, основанный на здравом смысле, что в случае 365 дней вообще нет никакого парадокса. Этим подтверждается аналогия (которая на самом деле была полной) с задачей о ящиках и черном шаре.

Решение модифицированной задачи о «двери свободы». Узник задал следующий вопрос: «Верно ли следующее утверждение: если эта дверь — «дверь свободы», то ваш ответ на мой вопрос будет ложью, а если нет, то истиной?»

Слуга рассуждает строго логически. Поэтому независимо от того, лжет ли он или говорит правду, его ответ позволит узнику определить «дверь свободы».

Рассмотрим следующую таблицу:

Слуга	Указанная дверь «дверь свободы»	Утверждение	Ответ слуги
Говорит правду	Да	Ложно	Нет
Лжет	Да	Истинно	Нет
Говорит правду	Нет	Истинно	Да
Лжет	Нет	Ложно	Да

Таким образом, если слуга ответил «нет», то показанная ему дверь — это «дверь свободы»; если же он сказал «да», то можно смело идти во вторую дверь. Мы видим, что узник **может** заставить своего соседа по темнице открыть истину.

Не следует ли теперь выбросить на свалку пресловутый детектор лжи?

Очевидно, нет, поскольку логическая хитрость, заставляющая допрашиваемого открыть истину, эффективна лишь в том случае, если слуга соглашается действовать в рамках строгой логики, — что, кстати сказать, есть довольно жесткое условие: пожалуй, никто из нас бы не согласился во всех случаях действовать и говорить только логично[1].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Грезы улетают прочь. Чудесная страна логики с ее устаревшими атрибутами и опереточными султанами подернулась туманом. Жанно покидает свой солнечный чердак.

Но он еще вернется туда.

Пожелаем же читателю чтобы, как и Жанно на своем чердаке, он смог найти в этой книге немало интересного, над чем ему бы захотелось поломать голову.

---

[1] Напомню, например, абсолютно нелогичное (здесь нарушен логический *закон противоречия: А* и «не *А*» не могут быть одновременно верны), но хорошо понятное каждому двустишие римского поэта I в. до н. э. Катулла:

Да! Ненавижу и вместе люблю.— Как возможно, ты спросишь?
Не объясню я. Но так чувствую, смертно томясь.

(Пер. А. Пиотровского.) — *Прим. ред.*

РЕШЕНИЯ

1

1. Положим на левую чашу весов два ключа, две монеты и трех солдатиков, а на правую — яблоко, солдатика и абрикос.

Добавим на левую чашу гирьку в 50 г, а на правую — монету, ключ, солдатика и грушу. Далее положим на левую чашу абрикос, яблоко и грушу, а на правую — монету, ключ, солдатика и пружину от будильника.

Теперь снимем с каждой из чаш весов по два ключа, две монеты, трех солдатиков, абрикос, яблоко и грушу.

Пружина от будильника весит 50 г.

2. У Жана было 300, а у Поля — 400 франков. Вместе они имели 700 франков.

3. Обозначим через c возраст младшей дочери Мартенов. Согласно условию задачи, число c таково, что $16c+40$ кратно 31.

Далее в гл. 9 будет показано, как решаются уравнения вида $31m-16c=40$. Однако в данном случае, поскольку коэффициенты уравнения невелики, его решение можно найти методом проб и ошибок: $m=8$, $c=13$.

Следовательно, возраст членов семьи Дюпон соответственно составляет 53, 49, 17 и 17 лет, возраст Мартенов дается следующими цифрами: 45, 39, 15 и 13 лет.

Суммарный возраст членов обеих семей равен 248 годам — единственное распределение восьми человек по двум группам одного общего возраста дается равенством

$$53+39+17+15=124=49+45+17+13.$$

Таким образом, близнецы играют в **разные** игры.

4. У Жана было два квадратных участка со стороной 700 м каждый, которые он обменял на прямоугольный участок 1000×980 м.

Периметр двух прежних квадратных участков равнялся 5600 м, а периметр нового прямоугольного участка — 3960 м, что дает разницу в 1640 м.

Участок Жака представляет собой четырехугольник площадью 168 100 м^2 и периметром 1640 м. Следовательно, участок Жака — квадрат, ибо всякий другой четырехугольник с периметром 1640 м имеет меньшую площадь.

5. Пусть n — число баранов и a — возраст пастуха, тогда

$$n(n-1)=15+a(n-2),$$

или

$$n^2-(a+1)n+2a-15=0.$$

Так как n — целое число, дискриминант этого квадратного уравнения с неизвестным n должен равняться квадрату некоего целого числа; обозначим это число через b. Тогда

$$(a+1)^2-4(2a-15)=b^2,$$

$$a^2-6a+61-b^2=0.$$

Но a тоже целое число; поэтому дискриминант последнего квадратного уравнения с неизвестным a также равняется квадрату целого числа; обозначим его через c. Тогда

$$9-61+b^2=c^2$$

или

$$b^2-c^2=52, \text{ т. е. } (b+c)(b-c)=52=2\times2\times13.$$

Единственное решение этого последнего уравнения в целых числах таково: $b=14$, $c=12$.

Итак, пастуху 15 лет.

6. Вот красивое решение:

$$2\times4\,938\,271\,605=9\,876\,543\,210.$$

В первом числе цифры 4, 3, 2, 1 и 0, взятые в этом именно порядке, чередуются с цифрами 9, 8, 7, 6 и 5, также следующими в названном порядке.

7. Пусть N — число, которое делится на число хорошо работающих учеников, n — число учеников в классе и n_0 — число учеников, хорошо работавших в первую неделю. Тогда мы получим

$$\frac{N}{n_0-2}=\frac{N}{n_0}+4 \quad \text{и} \quad \frac{N}{n}=\frac{N}{2(n_0-2)}.$$

Отсюда

$$N=2n_0(n_0-2), \; n=2(n_0-2).$$

Первым значением N вида $2n_0(n_0-2)$, которое на 2 отличается от кратного 11, оказывается 240. Следовательно, $n_0=12$.

В классе 20 учеников.

8. В Приложении I дается метод, который позволяет вычислить день недели, соответствующий любой заданной дате.

Произведение $70\,840=2^3\times5\times7\times11\times23$. Таким образом, для возрастов трех человек с различными годами рождения существует много возможностей.

Три дня рождения приходятся на одно число одного и того же (летнего) месяца, но на три последовательных дня недели.

Следовательно, три годовых коэффициента (см. Приложение I) равны трем последовательным целым числам. Благодаря этому из всех возможных комбинаций удается выбрать искомую, а именно 1912, 1913 и 1945 гг.

Самый пожилой из трех человек родился в 1912 г. Его первый Новый год 1 января 1913 г. пришелся на среду.

2

1. Примем за единицу длины меньшую из сторон прямоугольника. Сторона равновеликого прямоугольнику квадрата равна тогда $\sqrt{2}$; ее легко провести из вершины прямоугольника. Разрезание на три части очевидно (рис. 26)

2. Разберем эту задачу в общем виде. Пусть длины сторон прямоугольника $ABCD$ (рис. 27) равны соответственно a и h:

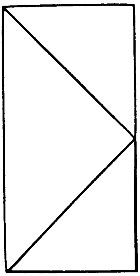


Рис26

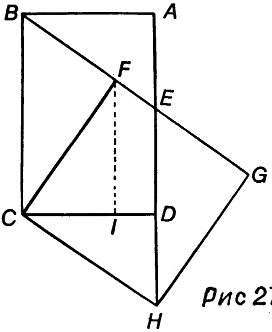


Рис 27

$$BC=a \text{ и } CD=h, \text{ где } a>h.$$

Сторона равновеликого прямоугольнику квадрата равна d, где

$$ah=d^2.$$

В прямоугольнике проведем $BE=d$ и из точки C опустим на BE перпендикуляр CF. Тогда треугольники ABE и BFC будут подобны, а значит,

$$\frac{CF}{BC}=\frac{AB}{BE}$$

и

$$CF=ah/d=d.$$

Следовательно, можно начертить квадрат $CFGH$.

CH равно d и параллельно BE. Значит, точка H принадлежит прямой, продолжающей AD. Отсюда очевидно искомое разрезание прямоугольника на три части.

Практическое построение разрезов:

Из F опускаем перпендикуляр FI на CD.

Треугольники ABE и IFC равны. Следовательно, $FI=CD=h$. Точку F легко найти как точку пересечения полуокружности диаметром BC с прямой, параллельной CD и отстоящей от CD на расстоянии h.

Ограничения, возникающие при таком построении: Данное построение возможно лишь при условии, что $BF \leqslant BE$. Другими словами,

$$BF^2 \leqslant BE^2,$$

т. е.

$$a^2 - d^2 \leqslant d^2, \text{ или } a^2 \leqslant 2d^2,$$

откуда

$$a^2 \leqslant 2ah \text{ и } a \leqslant 2h.$$

Предельный случай нам уже встретился в задаче 1, где стороны прямоугольника относились как 2:1.

3. Решим задачу в общем виде (рис. 28).

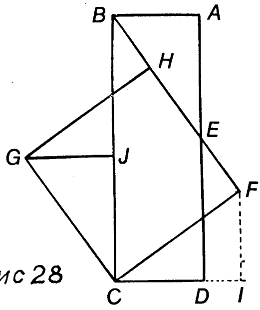


Рис 28

Пусть задан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $BC = a$ и $CD = h$, где $a > 2h$. Ясно, что сторона равновеликого прямоугольнику квадрата, как и ранее, равна d, где $ah = d^2$.

Проведем $BE = d$ и опустим из точки C перпендикуляр CF на продолжение прямой BE. Снова получаем

$$\frac{CF}{BC} = \frac{AB}{BE}.$$

Следовательно, $CF = d$.

Начертим квадрат $CFHG$ со стороной d и опустим из точки G перпендикуляр GJ на BC. После этого становится очевидным разрезание на четыре части.

Практическое проведение разрезов осуществляется так же, как и в предыдущем случае, поскольку $FI = h$

Ограничения, возникающие при этом построении: Такое построение возможно лишь при $BH \leqslant BE$, что соответствует $a \leqslant 5h$. Задача 5, таким образом, соответствует предельному случаю.

Теперь рассмотрим данный в задаче конкретный случай прямоугольника 3×1. Проведем разрезы на сетке из девяти единичных квадратов (т е. квадратов со стороной, равной 1; рис. 29). Ясно, что

$$KF = \sqrt{2},\ CF = \sqrt{3} = d,\ BF = \sqrt{6},\ DL = 1/\sqrt{2}$$

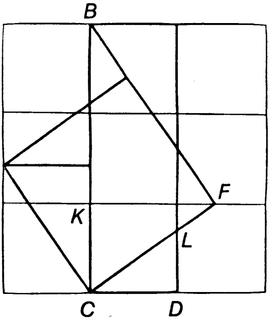


Рис29

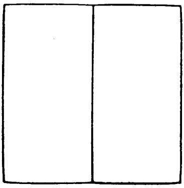


Рис30

4. Случай прямоугольника 4×1, очевидно, особый (рис. 30).

5. Предельный случай прямоугольника 5×1 представлен на рис. 31. Сторона квадрата равна $\sqrt{5}$, т е. гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами, равными соответственно 1 и 2.

6. Пусть у прямоугольника $ABCD$ сторона $BC = a$ и $CD = h$ (рис. 32); E — середина BC.

Проведем $EM = d$, где $ah = d^2$. Разумеется, M лежит на стороне AD, а не на ее продолжении. Действительно

$$(a/2 - h)^2 > 0,\ \text{т е. } a^2/4 - ah + h^2 > 0$$

но

$$ED^2 = a^2/4 + h^2,\ EM^2 = d^2 = ah.$$

Следовательно,

$$ED^2 - EM^2 > 0 \text{ и } ED > EM$$

Пусть L — середина AD. Опустим из C перпендикуляр CF на EM; тогда

$$\frac{CF}{EL}=\frac{EC}{EM},$$

следовательно,

$$CF=d/2.$$

Проведем $FI=d$ и построим квадрат $FIHG$, отправляясь от его стороны FI. Продолжим BC и AD до P и N.

$$CI=d/2,$$

треугольники CFE и CPI равны. Следовательно,

$$CP=a/2.$$

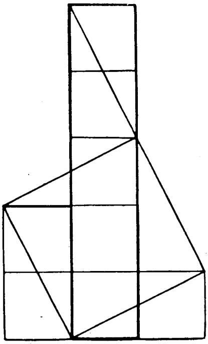


Рис 31

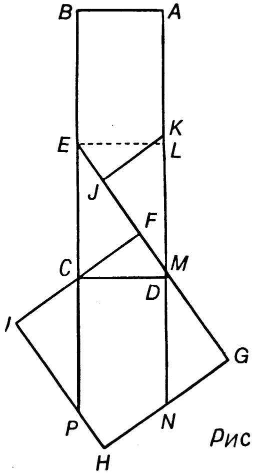


Рис 32

Проведем $AK=DN$ и опустим из K перпендикуляр KJ на EM. Точка K лежит между A и L. На самом деле можно заметить, что треугольники EFC и MGN равны, так как

$$MG=d-FM=EF.$$

Значит,

$$MN=a/2 \text{ и } DN=AK=\sqrt{a-h},\ h<a/2;$$

$$GN=d/2=HN.$$

Два пятиугольника $ABEJK$ и $DCPHN$ равны (конгруэнтны), ибо

$$PH = EJ,$$
$$FM = EM - EF = d - EF = d - IP = PH,$$
$$FM = EJ,\ EF = JM$$

Четыре треугольника CFE, CPI, MJK и MGN равны между собой.

Разрезание на четыре части представлено на рис. 32.

7. Прямоугольник размером 4×9 можно разбить на 36 «единичных» квадратов. На рис. 33 изображено «ступенчатое» разрезание, позволяющее с помощью

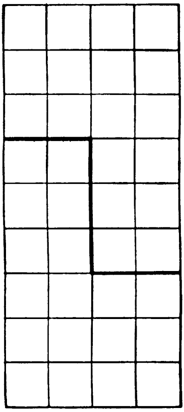


Рис 33

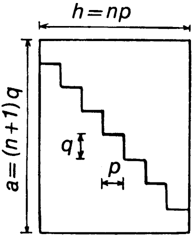


Рис 34

всего лишь двух частей преобразовать исходный прямоугольник в квадрат размером 6×6. Поставим более общий вопрос о том, при каких наложенных на прямоугольник условиях можно получить разрезание типа, изображенного на рис. 34?

Ширина каждой ступеньки равна p; высота — q. Общее число ступенек — n.

Следовательно, для прямоугольника со сторонами a и h должны выполняться соотношения

$$a = (n+1)q,\ h = np.$$

Сдвинув верхнюю часть на одну ступеньку вниз, мы получим квадрат. Значит,

$$nq = (n+1)p,$$

$$\frac{q}{p} = \frac{n+1}{n},$$

$$\frac{a}{h} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{q}{p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

Итак, стороны прямоугольника должны относиться друг к другу как квадраты двух последовательных целых чисел.

8, 9, 10, 11. Решение этих задач изображено на рис. 35, 36, 37 и 38.

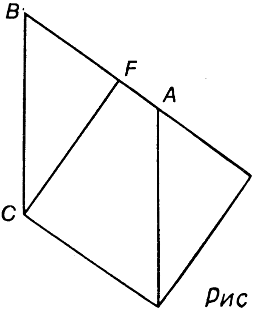


Рис 35

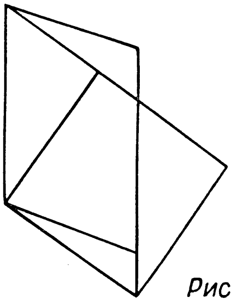


Рис 36

Параллелограммы, показанные на рис. 35 и 36, таковы, что наклонная сторона параллелограмма равна стороне равновеликого квадрата.

Соответствующее разрезание содержит на одну часть меньше, чем в общем случае.

12. Обратимся к рис. 35. Вершины B и C фиксированы. Высота h меняется. Требуется найти геометрическое место точек A.

Треугольник BFC — прямоугольный; при этом

$$FC = AB = d.$$

Построим треугольник ABM, равный треугольнику BFC (рис. 39); здесь $BM = BC = \text{const}$.

Так как угол CBM прямой, то точка M (при закрепленном отрезке CB) фиксирована.

Значит, когда h меняется, точка A описывает окружность диаметром BM (или, точнее, половину этой окружности, расположенную с той же стороны от BM, что и точка C).

13. Решения задач 2—6 давались с таким расчетом, чтобы подготовить читателя к разрезанию треугольника, но это не были оптимальные решения.

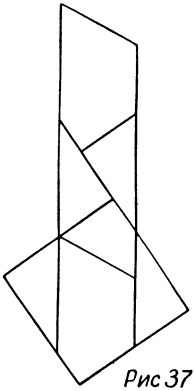


Рис 37

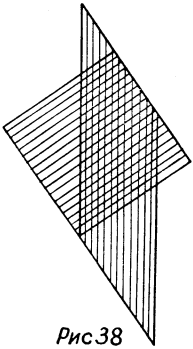


Рис 38

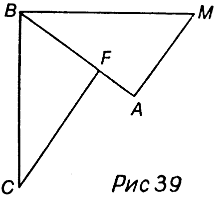


Рис 39

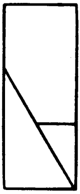


Рис 39 а

Оптимальное решение для случая прямоугольника 4×10 приведено на рис. 39*а*.

Предельным при подобном разрезании на три части будет случай прямоугольника 4×1.

Данное решение можно обобщить: прямоугольник можно преобразовать в квадрат, разрезав его на n частей, если выполняется соотношение

$$(n-2)^2 < a/h < (n-1)^2.$$

3

1. Задача сводится к решению в целых числах уравнения

$$a^2 - 77b^2 = \pm 1,$$

или

$$a^2/b^2 = 77 \pm 1/b^2.$$

Таким образом, нам нужно отыскать рациональную дробь a/b, достаточно близкую к $\sqrt{77}$. Но $\sqrt{77} = 8{,}774964... \approx 8{,}775$, а

$$0{,}775 = \frac{775}{1000} = \frac{31}{40},$$

значит,

$$8{,}775 = 351/40 = \sqrt{77} \text{ с точностью до } 0{,}000036.$$

Так как разность $(351)^2 - 77 \cdot 40^2$, конечно, целая, то, видимо, она нам подойдет. Действительно,

$$(351)^2 - 77 \cdot 40^2 = 1.$$

Таким образом, $a = 351$, $b = 40$ — следовательно, сторона участка стен равна

$$40 \cdot 0{,}025 = 1{,}00 \text{ м}.$$

Оказывается, древние египтяне задолго до нас пришли к (международному) метру как к единице измерения.

2. Пусть m — число шаров в конце игры у Мишеля, m' — у его брата; j — у Жака, j' — у его брата, d — число шаров у Даниэля.

Условие задачи позволяет выразить все эти числа через m; получаем

$$m' = 30 - m;\ j = m - 4;\ j' = 34 - m;\ d = 11.$$

При этом общее число шаров N будет равно

$$N = (m + m') + (j + j') + d = 30 + 30 + 11 = 71.$$

Но известно, что общее число шаров меньше 45. Следовательно, наши рассуждения ошибочны — видимо,

либо мальчиков четверо, причем Даниэль — брат Мишеля или Жака;

либо мальчиков всего трое, и Жак с Мишелем — братья.

Если бы мальчиков было четверо и Даниэль был братом Мишеля или Жака, то общее число шаров равнялось бы $(m+m')+(j+j')=30+30=60$; поэтому данный случай также приходится отбросить.

Остается единственная возможность: Жак и Мишель — братья, играют в шары всего трое мальчиков. При этом

$$j'=m \text{ и } m'=j,$$

и условия задачи дают $m+j=30$, $m+j=d+19$, и, значит, $d=11$, $j+d=m+7$, т. е. $j=13$, $m=17$. В таком случае

$$N=m+j+d=41$$

— условия задачи выполнены.

Таким образом, проигравшим является Жак, а выигравшим — его брат Мишель.

3. Ванна вмещает 210 л.

4. Естественными представляются следующие два стратегических плана:

1) зафиксировав для себя некоторую сумму очков N, бросать кость до тех пор, пока число очков не достигнет (или не превзойдет) этой величины N;

2) зафиксировав для себя некоторое число n бросаний, останавливаться каждый раз после n бросаний независимо от того, чему будет равна общая сумма очков, набранная в этих бросаниях.

5. Игрок решает остановиться, когда он наберет некоторое заранее фиксированное число очков N. Если игрок бросит кость еще раз, у него есть

один шанс из шести получить 0 очков (если выпадет 1);

один шанс из шести получить $N+2$, или $N+3$, или $N+4$, или $N+5$, или $N+6$ очков.

Ожидаемый выигрыш от бросания [1], следовательно, равен

$$\frac{1}{6}\cdot 0+\frac{1}{6}\cdot(N+2)+\frac{1}{6}\cdot(N+3)+\frac{1}{6}\cdot(N+4)+\frac{1}{6}\cdot(N+5)+ \\ +\frac{1}{6}\cdot(N+6)=\frac{5(N+4)}{6}$$

Естественно остановиться в тот момент, когда ожидаемый выигрыш будет меньше (или равен) числу очков N, получаемому при отказе от следующего броска:

$$\frac{5(N+4)}{6}\leqslant N, \qquad \text{т.е.} \quad N\geqslant 20.$$

При 19 очках стоит рискнуть бросить кость повторно; при 20 очках можно или вновь бросить кость, или остановиться, но при более чем 20 очках вновь бросать кость заведомо невыгодно.

6. Каждый раз, когда игрок бросает кость, имеется пять шансов из шести не прогореть (не получить 0 очков); при этом среднее число очков, которое мы в этом случае припишем себе, равно, очевидно, 4 (почему?) При n-кратном бросании кости имеется $(5/6)^n$ шансов не прогореть и набрать (в среднем) $4n$ очков.

Ожидаемый выигрыш при n-кратном бросании кости, таким образом, равен

$$4n(5/6)^n$$

Нужно остановиться на таком n, чтобы ожидаемый выигрыш при $(n+1)$-кратном бросании был меньше (или равен) аналогичному выигрышу при n-кратном бросании:

$$4(n+1)(5/6)^{n+1}\leqslant 4n(5/6)^n, \text{ т. е. } n\geqslant 5.$$

Ожидаемый выигрыш при пятикратном и шестикратном бросании одинаков. Следовательно, можно бросать кость 5 или 6 раз подряд.

7. Если игрок решит бросать кость, пока не наберет более 20 очков, то вероятности получить 21, 22, 23, 24, 25 или 26 очков будут таковы:

---

[1] *Математическое ожидание* выигрыша, как говорят в этом случае математики.— *Прим. ред.*

Число очков	21	22	23	24	25	26
Вероятность, %	9,49	9,08	7,08	5,17	3,38	1,66

Ожидаемое число очков M_1, набранное в одной серии бросаний, при первой стратегии, следовательно, таково:

$$M \approx 21 \cdot 0{,}0949 + 22 \cdot 0{,}0908 + 23 \cdot 0{,}0708 + 24 \times \times 0{,}0517 + 25 \cdot 0{,}0338 + 26 \cdot 0{,}0166 \approx 8{,}14.$$

При второй стратегии ожидаемый выигрыш

$$M_2 = 20(5/6)^5 \approx 8{,}04.$$

Таким образом, первая стратегия предпочтительней.

8. Правильные ответы таковы [1]:

12 м^2 — первая задача;

10 м^2 — третья задача;

20 м^2 — четвертая задача.

Что же касается второй задачи, в которой требовалось определить площадь полной поверхности куба, то ее никто не решил правильно.

Жанно получил нулевую оценку; все же остальные ученики получили по пять баллов.

9. В Приложении II приводится метод, позволяющий выписать сразу результат умножения двух многозначных чисел. Квадрат числа оканчивается на 1; значит, само число может оканчиваться лишь на 1 или 9.

Производя умножение этого числа на само себя согласно методу Приложения II, мы заметим, что цифра десятков у квадрата равна сумме:

удвоенного произведения двух последних цифр числа и числа, которое мы оставили «в уме» при первом умножении, т. е. 0 или 8.

[1] Полная поверхность куба со стороной n равна $6n^2$, т. е. она может иметь значения 6 м^2 24 м^2, 56 м^2 и т. д. — а таких чисел в нашей таблице нет совсем. Далее надо скомбинировать правильные ответы так, чтобы **точно один** из десяти учеников не решил ни одной задачи.— *Прим. ред.*

Поэтому если последняя цифра квадрата равна 1, то цифра десятков самого числа обязательно **четна**. Следовательно, наша задача решения не имеет.

4

1. Требуется, самое большее, три взвешивания. При первом взвешивании на каждую чашу весов кладут по семь монет. Если одна из чаш опустится, то самая тяжелая монета находится на ней; если же весы окажутся в равновесии, то самая тяжелая монета находится среди семи отложенных в сторону.

При втором взвешивании на каждую чашу весов кладут по три из семи «подозрительных» монет, а одну «подозрительную» монету откладывают в сторону. Если весы окажутся в равновесии, то самой тяжелой будет отложенная монета. Если же одна из чаш перетянет, то определится группа из трех монет, среди которых находится искомая.

При третьем взвешивании на каждую чашу весов кладут по одной из трех подозрительных монет. Если весы окажутся в равновесии, то самой тяжелой будет оставшаяся монета; в противном случае ей будет та, которая лежит на опустившейся вниз чаше.

2. Требуется пять взвешиваний. При каждом взвешивании монеты делят на три группы, причем число монет в группах выбирается так, чтобы эти числа были возможно более близкими, а количества монет на правой и на левой чашах весов одинаковыми. Весы указывают группу, в которой находится искомая тяжелая монета.

Так, при первом взвешивании можно на каждую чашу положить по 67 монет, оставив 66 монет в стороне.

Если одна чаша весов перетянет, то при втором взвешивании можно на каждую чашу положить по 22 монеты.

Если весы снова не будут в равновесии, то мы фактически получим условия предыдущей задачи — только число подозрительных монет будет равно 22, а не 21. Почти так же обстоит дело, если весы останутся в равновесии,— здесь число подозрительных монет будет равно 23. При третьем взвешивании будет отобрана группа из, самое большее, 8 монет; при четвертом взвешивании — из 3 монет и при последнем взвешивании будет отобрана группа из одной монеты.

3. Каждое взвешивание может дать три различных результата в зависимости от того, отклонятся ли весы вправо, влево или останутся в равновесии.

Если у нас имеется n монет, то существует n возможностей для самой тяжелой из них. Результат одного взвешивания, как мы уже это видели в предыдущих задачах, позволяет выбрать одну из трех групп подозрительных монет. Таким образом, одно взвешивание позволяет выбрать одну из трех групп, два взвешивания — одну из $3^2=9$ групп, три взвешивания — одну из $3^3=27$ групп; m взвешиваний позволяют выбрать одну из 3^m групп. И наоборот, если число монет равно 3^m, то можно отыскать самую тяжелую из них, образуя:

три группы по 3^{m-1} монет при первом взвешивании;

затем три группы по 3^{m-2} монет при втором взвешивании;

....

и, наконец, продолжая действовать таким образом, при m-м (последнем) взвешивании мы помещаем на каждую чашу весов только по одной монете.

Ответ: если $3^{m-1}<n\leqslant 3^m$ (где m — натуральное число), то нам потребуется m (или меньше) взвешиваний.

4. Для удобства пронумеруем монеты цифрами от 1 до 8.

Пусть, например, взвешивание состоит в том, что на левую чашу помещаются монеты 1, 2 и 3, а на правую чашу — монеты 4, 5 и 6; мы обозначим это взвешивание так:

$$1\ 2\ 3 - 4\ 5\ 6$$

Результат взвешивания запишем в виде

1 2 3\4 5 6 — если перетянет левая чаша весов;

1 2 3|4 5 6 — если весы останутся в равновесии;
1 2 3/4 5 6 — если перетянет правая чаша весов.

Сами монеты мы будем обозначать так:
n — если монета имеет обычный нормальный вес;
L — если монета тяжелее обычной;
l — если монета легче обычной.

Взвешивание, указанное в условии задачи, состояло в том, что сравнивались монеты 1, 2, 3 и 4 с монетами 5, 6, 7 и 8; пусть

1 2 3 4\5 6 7 8

Значит, либо отличная по весу от других монета тяжелее остальных и находится на левой чаше весов, либо она легче других и находится на правой чаше, т. е.

1, или 2, или 3, или 4 $= L$

или

5, или 6, или 7, или 8 $= l$.

При следующем взвешивании мы сравниваем монеты 1, 2 и 5 с 3, 4 и 6.

Если перетянула левая чаша (т. е. 1 2 5\3 4 6), то это значит, что

1, или 2, или 5 $= L$

или

3, или 4, или 6 $= l$.

Но в соответствии с результатами предыдущего взвешивания возможны лишь варианты

1 или 2 $= L$

или

6 $= l$.

При следующем взвешивании следует сравнить монеты 1 и 2:

если 1\2, то 1 — искомая, более тяжелая, чем остальные, монета;

если 1|2, то 6 — искомая монета, более легкая, чем другие.

Если при первом дополнительном взвешивании перетянет правая чаша весов (1 2 5/3 4 6), то нужно действовать аналогичным образом и при следующем взвешивании сравнить 3 и 4.

Если при первом дополнительном взвешивании весы окажутся в равновесии, то шесть первых монет нормальные, а искомая, более легкая монета — это 7 или 8. Значит, при следующем взвешивании достаточно сравнить 7 и 8.

Различные варианты можно свести в следующую таблицу:

<table>
<tr><td>Предварительное взвешивание</td><td colspan="8">1 2 3 4 ＼ 5 6 7 8</td></tr>
<tr><td>Первое взвешивание</td><td colspan="8">1 2 5-3 4 6</td></tr>
<tr><td>Результат первого взвешивания</td><td colspan="3">＼</td><td colspan="2">|</td><td colspan="3">／</td></tr>
<tr><td>Второе взвешивание</td><td colspan="3">1-2</td><td colspan="2">7-8</td><td colspan="3">3-4</td></tr>
<tr><td>Результат второго взвешивания</td><td>＼</td><td>|</td><td>／</td><td>＼</td><td>／</td><td>＼</td><td>|</td><td>／</td></tr>
<tr><td>Искомая монета</td><td>1</td><td>6</td><td>2</td><td>8</td><td>7</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Эта монета оказывается</td><td>L</td><td>/</td><td>L</td><td>/</td><td>/</td><td>L</td><td>/</td><td>L</td></tr>
</table>

5. Воспользуемся системой обозначений, введенной при решении предыдущей задачи. Тогда решение можно представить в виде следующей таблицы:

<table>
<tr><td rowspan="2">Первое взвешивание</td><td colspan="18">1 2 3-4 5 6</td></tr>
<tr><td colspan="6">＼</td><td colspan="6">|</td><td colspan="6">／</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Второе взвешивание</td><td colspan="6">1 4-2 5</td><td colspan="6">7-8</td><td colspan="6">1 4-2 5</td></tr>
<tr><td colspan="2">＼</td><td colspan="2">|</td><td colspan="2">／</td><td colspan="2">＼</td><td colspan="2">|</td><td colspan="2">／</td><td colspan="2">＼</td><td colspan="2">|</td><td colspan="2">／</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Третье взвешивание</td><td colspan="2">1-2</td><td colspan="2">1-3</td><td colspan="2">1-4</td><td colspan="2">1-7</td><td colspan="2">1-9</td><td colspan="2">1-8</td><td colspan="2">1-4</td><td colspan="2">1-3</td><td colspan="2">1-2</td></tr>
<tr><td>＼</td><td>|</td><td>|</td><td>／</td><td>＼</td><td>|</td><td>|</td><td>／</td><td>＼</td><td>／</td><td>|</td><td>／</td><td>|</td><td>／</td><td>＼</td><td>|</td><td>|</td><td>／</td></tr>
<tr><td>Искомая монета</td><td>1</td><td>5</td><td>6</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td><td>8</td><td>7</td><td>9</td><td>9</td><td>7</td><td>8</td><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td><td>5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Эта монета оказывается</td><td>L</td><td>/</td><td>/</td><td>L</td><td>/</td><td>L</td><td>/</td><td>L</td><td>/</td><td>L</td><td>/</td><td>L</td><td>/</td><td>L</td><td>/</td><td>L</td><td>L</td><td>/</td></tr>
</table>

6. Разделим монеты на шесть групп; три группы (a, b и c) выберем из числа монет, находящихся на левой чаше весов, и три группы (d, e и f) — среди монет, находящихся на правой чаше.

В группе a содержится 14 монет; в группе b — 14; в группе c — 12; в группе d — 13; в группе e — 13 и в группе f — 14 монет. Предположим, что весы отклонились в сторону групп abc.

При первом взвешивании сравниваются монеты групп a и d (пусть 27 монет этих групп находятся на левой чаше весов) с монетами групп b и e (пусть 27 монет этих групп находятся справа).

Если весы отклонятся влево, то либо искомая монета находится в группе a и она тяжелее остальных, либо она находится в группе e и легче остальных.

Если весы окажутся в равновесии, то либо искомая монета находится в группе c и тяжелее других, либо она — в f и легче остальных.

Если весы отклонятся вправо, то либо искомая монета находится в группе b и тяжелее остальных, либо она — в группе d и легче остальных.

Эти три случая вполне аналогичны друг другу. Рассмотрим, например, первый случай. Разобьем группы a и e на шесть более мелких групп:

$$a = g + h + i;\ e = j + k + m.$$

Группа g содержит 5 монет; h — тоже 5; i — 4 монеты; j — 4; k — 4 и m — 5 монет.

При втором взвешивании сравниваются группы g, k (пусть в них входит 9 монет) и j, h (пусть в них также входит 9 монет). Как и в предыдущем взвешивании, если весы отклонятся влево, то либо искомая монета находится в группе g и тяжелее других, либо она находится в группе j и легче остальных.

Здесь также возможны три аналогичных случая, из которых мы рассмотрим лишь первый.

Разобьем группы g и j на шесть новых групп:

$$g = n + p + q;\ j = r + s + t,$$

где n содержит 2 монеты; p — тоже 2; q — одну монету, так же как r и s; t содержит 2 монеты.

При третьем взвешивании сравниваются n, r и p, s.

Как и раньше, получим, что если весы отклонятся вправо, то либо искомая монета находится в группе p и тяжелее других, либо она находится в группе r и легче остальных.

При четвертом и последнем взвешивании сравниваются две монеты из группы, содержащей два элемента (в нашем примере — из группы p).

7. Месье Бертран рассуждал следующим образом.

Как и в случае задачи 3, каждое взвешивание не может дать нам больше, чем возможность выделить одну из трех групп, содержащих определенное (конечно, целое) число монет в качестве «подозрительных».

Одно взвешивание позволяет выбрать одну из трех возможностей, два взвешивания — одну из девяти и три взвешивания — одну из двадцати семи возможностей.

Но искомая монета может совпадать с любой из четырнадцати непоцарапанных монет, и при этом она может оказаться легче или тяжелее остальных.

Таким образом, мы имеем двадцать восемь возможностей, т. е. на одну больше, чем удается выделить с помощью трех взвешиваний. Значит, в любом случае нам не удастся найти монету, отличную от других по весу.

Это можно пояснить на следующем простом примере.

Одно взвешивание позволяет выбрать одну из трех возможностей. Рассмотрим следующую задачу: среди четырех одинаковых по виду монет найти ту, которая отличается по весу от остальных. При первом взвешивании сравниваются две монеты с двумя другими. Левая чаша весов перевешивает, это означает, что:

либо искомая монета тяжелее остальных и находится на левой чаше весов,

либо она легче остальных и находится на правой чаше весов.

Таким образом, у нас осталось четыре возможности. Можно ли в любом случае найти искомую монету с помощью одного дополнительного взвешивания?

Месье Бертран утверждает, что это невозможно, поскольку одно взвешивание позволяет выбрать только одну из трех возможностей.

Эту ситуацию легко представить с помощью принятой нами системы обозначений. Перенумеруем монеты цифрами от 1 до 4.

Результат первого взвешивания записывается в виде

$$1\ 2 \backslash 3\ 4.$$

Четыре вышеупомянутые возможности таковы:

$$1 \text{ или } 2 = L$$

либо

$$3 \text{ или } 4 = l.$$

Что можно сделать при втором взвешивании? Либо сравнить одну монету с другой, либо сравнить две монеты с двумя другими.

Если сравнивается одна монета с другой, то остаются еще две монеты; и если искомая монета находится среди них, то для ее определения требуется третье взвешивание.

Если же сравниваются две монеты с двумя другими, то нам не остается иной возможности, как сравнивать по весу 1 3 с 2 4 (или 1 4 с 2 3, что фактически то же самое).

При этом весы остаться в равновесии не могут. Если они отклонятся влево, то

$$1 \text{ или } 3 = L \text{ либо } 2 \text{ или } 4 = l.$$

Учитывая результат первого взвешивания, мы получим, что

$$\text{либо } 1 = L, \text{ либо } 4 = l.$$

Остаются две возможности — и, чтобы выбрать одну из них, снова требуется третье взвешивание.

Точно так же в случае двадцати восьми возможностей в некоторых случаях после третьего взвешивания остаются две возможности — и, чтобы выбрать одну из них, необходимо четвертое взвешивание.

8. Прав месье Мартен.

Месье Бертран совершил двойную ошибку.

Во-первых, он утверждал, что всего имеется двадцать восемь возможностей. Это было бы верно, если бы требовалось определить отличную по весу от остальных монету и сказать, *тяжелей она или легче остальных*. Но в задаче, поставленной месье Мартеном, требовалось только найти отличную по весу от остальных монету, но не требовалось оценить ее вес в сравнении с другими монетами. Мы увидим, что в решении месье Мартена во всех случаях удается обнаружить искомую монету, но в одном случае — когда речь зайдет о монете, отмеченной числом 15,— будет невозможно ответить, тяжелее она остальных или легче. Следовательно, месье

Мартен выбирает только одну из двадцати семи возможностей, а не одну из двадцати восьми возможностей, как считал Бертран. Схема взвешиваний, избранная месье Мартеном, подробно представлена в следующей таблице:

<table>
<tr><td colspan="27">Первое взвешивание
1 2 3 4 5-6 7 8 9 10</td></tr>
<tr><td colspan="9">\</td><td colspan="9">|</td><td colspan="9">/</td></tr>
<tr><td colspan="27">Второе взвешивание</td></tr>
<tr><td colspan="9">1 2 3 6 13-4 5 10 11 12</td><td colspan="9">10 11-12 13</td><td colspan="9">1 2 3 6 13-4 5 10 11 12</td></tr>
<tr><td colspan="3">\</td><td colspan="3">|</td><td colspan="3">/</td><td colspan="3">\</td><td colspan="3">|</td><td colspan="3">/</td><td colspan="3">\</td><td colspan="3">|</td><td colspan="3">/</td></tr>
<tr><td colspan="27">Третье взвешивание</td></tr>
<tr><td colspan="3">1-2</td><td colspan="3">7-8</td><td colspan="3">4-5</td><td colspan="3">12-13</td><td colspan="3">1-14</td><td colspan="3">12-13</td><td colspan="3">4-5</td><td colspan="3">7-8</td><td colspan="3">1-2</td></tr>
<tr><td>\</td><td>|</td><td>/</td><td>\</td><td>|</td><td>/</td><td>\</td><td>|</td><td>/</td><td>\</td><td>|</td><td>/</td><td>\</td><td>|</td><td>/</td><td>\</td><td>|</td><td>/</td><td>\</td><td>|</td><td>/</td><td>\</td><td>|</td><td>/</td><td>\</td><td>|</td><td>/</td></tr>
<tr><td colspan="27">Искомая монета</td></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>8</td><td>9</td><td>7</td><td>4</td><td>6</td><td>5</td><td>13</td><td>11</td><td>12</td><td>14</td><td>15</td><td>14</td><td>12</td><td>11</td><td>13</td><td>5</td><td>6</td><td>4</td><td>7</td><td>9</td><td>8</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="27">Эта монета оказывается</td></tr>
<tr><td>L</td><td>L</td><td>L</td><td>/</td><td>/</td><td>/</td><td>L</td><td>/</td><td>L</td><td>/</td><td>L</td><td>/</td><td>/</td><td>?</td><td>L</td><td>L</td><td>/</td><td>L</td><td>/</td><td>L</td><td>/</td><td>L</td><td>L</td><td>L</td><td>/</td><td>/</td><td>/</td></tr>
</table>

Во-вторых, пример, приведенный месье Бертраном, не вполне идентичен задаче, поставленной месье Мартеном, поскольку в примере, приведенном Бертраном, уже первое взвешивание вынуждает нас не только искать отличную от других монету, но и определять попутно, тяжелее она или легче остальных.

Решение, требующее трех взвешиваний, приведено в таблице; поцарапанная монета — это монета 10.

9. Самое большое количество монет — 40. При первом взвешивании на каждую чашу весов кладут по 13 монет.

Если весы окажутся в равновесии, то мы получим условия предыдущей задачи, где «поцарапанной» можно считать любую из снятых с весов монет.

Если какая-то чаша весов перевесит, то далее нужно действовать как при втором взвешивании в задаче 6 — и отличную по весу от остальных монету удастся найти только за четыре взвешивания.

Но нельзя взять 41 монету. Действительно, в таком случае пришлось бы:

1. Либо положить на каждую чашу по 14 монет — и, в случае когда одна чаша весов перетянет, мы получили бы двадцать восемь возможных вариантов, на этот раз не имея возможности перегруппировки, подобной

той, которой мы занимались в случае сомнительной монеты 15 из предыдущей задачи. Для выяснения того, какая из этих двадцати восьми возможностей реализуется, может потребоваться четыре взвешивания.

Чтобы проще в этом убедиться, нужно действовать, как указывалось в задаче 6, рассматривая группы из пяти и четырех монет. Можно заметить, что в одном из случаев следует сначала выбрать одну из десяти возможностей с помощью двух взвешиваний (искомая монета находится или в одной группе из пяти монет и является более тяжелой, чем остальные, или — в другой группе из пяти монет и оказывается легче остальных), а затем выбирать одну из четырех возможностей с помощью одного взвешивания, что, однако, не всегда возможно.

2. Либо положить на две чаши только 26 монет и оставить 15 монет в стороне. Но, в случае если бы весы оказались в равновесии, нам не удалось бы определить отличную по весу монету среди 15 «подозрительных» с помощью всего трех взвешиваний.

10. Пусть при первом взвешивании равновесие весов нарушилось. Нам нужно, чтобы осталось не более $3^4 = 81$ возможностей. Значит, на каждую чашу можно положить не более сорока монет — мы приходим к ситуации задачи 6.

Если весы останутся в равновесии, то при втором взвешивании можно положить 14 новых монет на левую чашу весов и 13 новых монет вместе с одной из 80 первых, заведомо «стандартных» (или «нормальных»), монет — на правую чашу. Если же одна из чаш весов перетянет, то останется только двадцать семь возможностей, из которых следует выбрать одну с помощью трех (точно трех — ибо $3^3 = 27$) дополнительных взвешиваний.

Если весы все время будут находиться в равновесии, то при третьем взвешивании берут 9 новых монет (5 кладут на одну чашу, четыре вместе с одной из 80 первых — на другую), при четвертом взвешивании — 3 новых монеты и при последнем взвешивании — одну новую монету. Таким образом, мы имеем

$$80 + 27 + 9 + 3 + 1 = 120$$

монет, из которых находим отличающуюся от других по весу, если только она находится среди этих монет.

Следовательно, искомая вероятность равна $120/200 = 3/5$ (см. также конец решения задачи 13).

11. При первом взвешивании разделим x_n монет на две части, положив на левую чашу весов a, а на правую — b монет, дополнив эту чашу до a монет (если $b < a$) заведомо «стандартными» монетами, имеющимися в нашем распоряжении. При этом по условию задачи

$$a + b = x_n.$$

Рассмотрим монеты, лежащие на левой чаше весов. При втором взвешивании можно только:

либо оставить их на этой чаше; пусть a_1 — число монет, оставленных на левой чаше;

либо перенести их на другую чашу; пусть a_2 — число монет, перенесенных на правую чашу;

либо убрать их с весов; пусть a_3 — число монет, снятых с весов.

Точно так же разделим на три группы b монет со второй чаши: b_1 из них оставлено на этой же чаше; b_2 монет перенесено на другую чашу весов и b_3 монет совсем снято с весов. Тогда имеем

$$a_1 + a_2 + a_3 = a,$$
$$b_1 + b_2 + b_3 = b.$$

Следовательно, при втором взвешивании слева находится $(a_1 + b_2)$ монет, а справа — $(a_2 + b_1)$ монет. Предположим, что при первом взвешивании весы отклонились влево. Это значит, что либо искомая монета находится среди a монет на левой чаше и она тяжелее остальных, либо она находится среди b монет на правой чаше и легче остальных.

Если при втором взвешивании весы снова отклонятся влево, то либо искомый образец находится среди a_1 монет и тяжелее остальных, либо она находится среди b_1 монет и легче остальных.

Если весы окажутся в равновесии, то искомая монета находится в группе a_3 и тяжелее остальных или она находится в группе b_3 и легче остальных.

Если весы отклонятся вправо, то искомая монета либо находится среди a_2 монет и тяжелее остальных, либо она находится среди b_2 монет и легче остальных.

В каждом из этих трех случаев все сводится к исходной задаче, где слева находится a_i монет, а справа — b_i монет (здесь $i=1$, 2 или 3) и где нужно определить искомую монету с помощью $n-1$ взвешиваний.

Следовательно, *в лучшем случае*

$$a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3=x_{n-1},$$

откуда, очевидно, следует, что

$$3x_{n-1}=a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3=a+b=x_n.$$

Но легко видеть, что $x_1=1$ и $x_2=3$.

Отсюда вытекает, что в *лучшем случае* $x_n=3^{n-1}$

В наших рассуждениях мы интересовались только тем, что происходит при каждом взвешивании, причем на каждой чаше должно было быть одинаковое число монет. Кроме того, мы указали, что

$$a_1+b_1=a_2+b_2=a_3+b_3=x_{n-1}$$

в лучшем случае.

Можно доказать, что действительно $x_n=3^{m-1}$, установив способ взвешивания. Итак, у нас есть 3^{n-1} одинаковых с виду монет, среди которых одна отличается по весу от остальных и еще одна (нормального веса) как-то помечена (скажем, поцарапана).

При первом взвешивании на левую чашу весов кладут $(3^{n-1}+1)/2$ монет, а на правую — $(3^{n-1}-1)/2$. монет плюс поцарапанную монету заведомо нормального веса.

Далее образуют шесть групп образцов, содержащих соответственно

$$a_1=\frac{3^{n-2}+1}{2},\qquad a_2=\frac{3^{n-2}+1}{2},\qquad a_3=\frac{3^{n-2}-1}{2}$$

и

$$b_1=\frac{3^{n-2}-1}{2},\qquad b_2=\frac{3^{n-2}-1}{2},\qquad b_3=\frac{3^{n-2}+1}{2}$$

монет.

Сравнивают a_1b_2 с a_2b_1.

Известно, что при каждом взвешивании искомая монета находится либо среди $(3^p+1)/2$ монет (и тогда она тяжелее остальных), либо среди $(3^p-1)/2$ монет (и тогда она легче остальных), где p — натуральное число, характеризующее номер взвешивания. Точнее говоря, образуя при очередном взвешивании шесть групп, подобно тому как мы поступали при втором взвешивании, мы каждый раз уменьшаем показатель степени p на единицу.

Следовательно, с помощью n взвешиваний мы можем среди 3^{n-1} монет найти монету, отличную по весу от остальных, помещая при первом взвешивании на обе чаши весов все имеющиеся монеты.

Все сводится к «определению отличной по весу монеты» среди трех «сомнительных» монет с помощью двух взвешиваний. Во всех случаях мы попутно определяем, легче или тяжелее искомая монета, чем все остальные.

12. Итак, у нас имеется y_n монет.

Поместим на левую чашу весов a монет, на правую — b монет, а c монет оставим в стороне:

$$a+b+c=y_n.$$

Если весы останутся в равновесии, то мы получим условия исходной задачи, где только число «подозрительных» монет будет равно c и вместо n нам останется $n-1$ взвешиваний, следовательно,

$$c=y_{n-1},$$

Если весы отклонятся в какую-нибудь сторону, то мы получим условия задачи 11, значит,

$$a+b=x_n=3^{n-1}$$

и поэтому

$$y_n=y_{n-1}+3^{n-1}.$$

Легко показать, что $y_1=1$, а $y_2=4$. Отсюда вытекает, что

$$y_n=(3^n-1)/2.$$

Каков же соответствующий способ взвешивания? При первом взвешивании вне весов остается $(3^{n-1}-1)/2$ монет; столько же монет вместе с заведомо стандартной («нормальной») монетой мы кладем на правую чашу весов, а на левую чашу положим $(3^{n-1}+1)/2$ монет.

Если весы окажутся в равновесии, то далее мы поступаем точно так же, как раньше, но только не со всеми $(3^n-1)/2$ монетами (не положенными на весы), а лишь с оставшимися $(3^{n-1}-1)/2$ монетами

Если же одна из чаш весов перетянет, то мы придем к ситуации задачи 11.

Во всех случаях удается найти монету, отличную по весу от других и определить, легче она или тяжелее остальных.

13. Пусть z_n — наибольшее возможное число монет, такое, что если одна из этих монет отлична по весу от остальных, то ее можно найти за n взвешиваний и при этом определить, легче она или тяжелее остальных.

При первом взвешивании мы на каждую чашу весов кладем по a монет и b монет оставляем в стороне.

Так как в случае равновесия весов мы приходим к ситуации предыдущей задачи, где число «подозрительных» монет равно b и число требуемых взвешиваний равно $n-1$, то естественно требовать, чтобы

$$b=y_{n-1}=(3^{n-1}-1)/2.$$

В лучшем случае при нечетном x_n мы получим

$$2a=x_n-1=3^{n-1}-1,$$

и, значит,

$$z_n=2a+b=(3^n-3)/2.$$

Можно показать с помощью соответствующего способа взвешивания, что это значение z_n действительно удовлетворяет всем нашим требованиям — для этого достаточно указать соответствующую процедуру взвешивания, позволяющую найти искомую монету.

Разделим z_n монет на 3 равные части, по $(3^{n-1}-1)/2$ монет в каждой части, и поместим по одной такой части на каждую чашу весов, а третью часть монет оставим в стороне.

Если весы окажутся в равновесии, то все сведется к задаче 12.

Если же равновесие весов нарушится, то мы придем к условиям задачи 11 с той лишь разницей, что общее число монет окажется на единицу меньше, чем ранее.

Теперь, вооруженные этими данными, мы можем снова обратиться к задаче 10.

С помощью пяти взвешиваний можно обнаружить искомую монету, самое большее, среди z_5 монет. Но $z_5 = (3^5 - 3)/2 = 120$; значит, искомая вероятность равна

$$120/200 = 3/5.$$

14. Пусть u_n — наибольшее возможное число монет, среди которых не более чем за n взвешиваний можно обнаружить монету, отличную по весу от остальных, *если, кроме того, имеется одна помеченная* (скажем, поцарапанная), *заведомо стандартная монета.* u_n не должно совпадать с z_n — ведь теперь нам больше не требуется попутно определить, легче ли искомая монета остальных или тяжелее.

При первом взвешивании на левую чашу весов мы кладем a монет, на правую — b монет, а c монет оставляем в стороне. При этом, очевидно, естественно потребовать выполнения следующих равенств:

$$a + b = x_n$$

(если одна из чаш перетянет, то далее мы уже будем знать, легче ли найденная монета остальных или тяжелее) и

$$c = u_{n-1},$$

откуда

$$u_n = u_{n-1} + 3^{n-1}.$$

Легко найти, что $u_1 = 2$ и $u_2 = 5$. Отсюда и из равенства $u_n = u_{n-1} + 3^{n-1}$ вытекает

$$u_n = (3^n + 1)/2.$$

Способ взвешивания в этом случае состоит в том, что мы помещаем $(3^{n-1} + 1)/2$ монет на левую чашу весов, другие $(3^{n-1} - 1)/2$ монет и заведомо «нормальную» монету — на правую чашу весов, а $(3^{n-1} + 1)/2$ монет оставляем в стороне. Если весы окажутся в равновесии, то мы попадаем в ситуацию той же задачи, с той лишь разницей, что число взвешиваний n заменяется на $n-1$ и общее число $u_n = (3^n + 1)/2$ монет — на $u_{n-1} = (3^{n-1} + 1)/2$ монет (это отложенные в сторону монеты). Если же весы не окажутся в равновесии, то мы попадаем в ситуацию задачи 11.

Наконец, пусть v_n — максимальное число монет, среди которых отличную по весу монету можно найти не более чем за n взвешиваний, в случае когда у нас нет помеченной (заведомо «стандартной») монеты.

При первом взвешивании на каждую чашу весов кладут по a монет, а b монет оставляют в стороне. Здесь, очевидно,

$$2a = x_n - 1$$

и

$$b = u_{n-1},$$

в силу чего

$$v_n = u_n - 1.$$

Следовательно, ответ на вопрос задачи 14 дает число v_n — максимальное число монет, среди которых отличную по весу монету можно найти с помощью не более чем n взвешиваний, где

$$v_n = (3^n - 1)/2.$$

Способ взвешивания состоит в том, что на каждую чашу весов кладут по $(3^{n-1} - 1)/2$ монет, а $(3^{n-1} + 1)/2$ монет оставляют в стороне.

Если весы окажутся в равновесии, то u_{n-1} оставшихся монет делят на части так, как указано в начале решения этой задачи. Если же равновесие весов нарушится, то наша задача сводится к задаче 11.

В частности, при $n = 3$

$$u_n = 14, \text{ а } v_n = 13.$$

Равенство $u_n = 14$ снова возвращает нас к условиям задачи 7.

5

---

1. Пусть V — скорость Жанно относительно воды, v — скорость течения и l — расстояние, которое проходит Жанно в одну сторону. Тогда

$$l/(V+v)=2 \text{ и } l/(V-v)=3,$$

откуда

$$l/V=12/15 \text{ и, значит, } 2l/V=24/5.$$

Чтобы пройти по озеру расстояние, равное тому, которое он проплыл по реке в ту и другую сторону, Жанно потребуется 4 ч 48 мин.

2. Обозначим через j, p и c суммы, оставшиеся соответственно у Жака, Пьера и Клода. Нам нужно решить в целых положительных (или хотя бы неотрицательных) числах уравнение

$$j+1443p=2923\,c.$$

Как 1443, так и 2923 кратны 37; следовательно, и j кратно 37.

По условию задачи у Жака еще остались деньги, но не более 50 франков. Значит, у него осталось 37 франков. Поэтому все сводится к решению уравнения

$$39p+1=79c.$$

У этого уравнения есть очевидное решение

$$p=2,\ c=1.$$

Следовательно, у Клода остался только 1 франк.

3. Задача не имеет решения. Действительно, у Поля не было 13 шаров. Следовательно, у Николя их — не менее 18. Но это невозможно, если у Клода и Николя вместе — 17 шаров.

4. Эта задача не имеет решения. Действительно, она приводит к соотношению

$$a^2=3b^2+26=3n+2$$

(где числа a и b, а также n — целые). Но квадрат целого числа либо кратен трем, либо равен кратному трем плюс 1, но никогда не может равняться числу, кратному трем, плюс 2.

5. Месье Вер смог определить количество галстуков, купленных каждым из трех других покупателей, зная,

что одно из трех соответствующих чисел совпадает с числом зеленых галстуков, купленных им самим. Но — проверьте это самостоятельно! — если число галстуков, которые купил месье Вер, равно 1, или 2, или 3, ..., или 27, то уравнение

$$b + j + r = 30,$$

где одно из чисел b, j или r равно v (эти числа — количества купленных галстуков каждого цвета), допускает минимум **два** решения в целых положительных числах, таких, что решения B, J и R системы

$$b \cdot B + j \cdot J + r \cdot R = 300,\ 3B = 20,\ 2J + R = 20$$

(здесь числа B, J и R — цены галстуков) будут положительны. Напротив, если $v = 28$ (а больше, чем 28, число v, разумеется, быть не может), то нашим условиям удовлетворяет **единственное** решение первого уравнения:

$$b = j = 1, \qquad r = 28\ (= v).$$

Следовательно, месье Вер купил 28 галстуков. Месье Блё и месье Жон купили только по одному галстуку, т. е. поровну.

6. Если бы на первые два вопроса Жаку ответили ДА, то это означало бы, что ожерелья продавались по трем разным ценам, а не по двум, как утверждается в условии задачи.

Следовательно, на все три вопроса Жак получил ответ НЕТ — и, значит, ожерелье он не купил.

7. Вторая машина никогда не догонит первую, которая движется с большей скоростью.

8. Эта задача часто встречается в сборниках математических головоломок. Но подход к ней часто оказывается малореалистичным, поскольку предлагаемое решение не имеет никакого отношения к тому, что может произойти на реальных выборах.

Мы считаем, что система выборов такова: избирается кандидат, который чаще других оказался на первом месте; голоса же, поданные за второго и третьего кандидатов, никак не учитываются (пропадают) — такая система выборов довольно обычна.

Вот, например, распределение голосов, удовлетворяющее условиям задачи:

17 членов клуба проголосовали : Бернар — Жак — Пьер,

16 » » » : Жак — Пьер — Бернар,

15 » » » : Пьер — Жак — Бернар.

Французский философ и математик Кондорсе (1743—1794) первым указал на парадоксы такого типа и сделал отсюда вывод о том, что не существует полностью справедливой системы выборов: воля избирателей реализуется на выборах лишь весьма несовершенно.

Против такого вывода можно выдвинуть два возражения:

во-первых, та система голосования, которая фигурирует в нашем примере, довольно неудачна;

во-вторых, распределение голосов, соответствующее условию задачи, малореалистично.

Действительно, весьма маловероятно, чтобы 17 членов клуба поставили Бернара на первое место, а остальные 31 — только на последнее место. Гораздо более правдоподобна ситуация, когда кандидат, победивший с весьма незначительным преимуществом, встречался определенное число раз и под вторым номером. Тем не менее нет ничего невозможного в предположении, что один из двух других кандидатов оказывался перед Бернаром большее число раз, чем он перед этим кандидатом, как это видно из следующего примера:

10 членов клуба проголосовали: Бернар — Жак — Пьер,

7 » » » : Бернар — Пьер — Жак,

10 » » » : Жак — Пьер — Бернар,

6 » » » : Жак — Бернар — Пьер,

8 » » » : Пьер — Жак — Бернар,

7 » » » : Пьер — Бернар — Жак.

В этом примере Бернар оказался на первом месте 17 раз и, следовательно, победил.

Распределение голосов здесь вполне реалистично. Однако легко видеть, что Бернар оказался впереди Пьера 23 раза, тогда как Пьер оказался впереди Бернара 25 раз.

Все дело здесь в системе голосования. Выбор, который совершается избирателями, не всегда одинаково важен: прежде всего нужно учитывать выбор кандидата, помещаемого на первое место; в том же случае, когда на первом месте стоит Бернар, не так уж важно, стоит ли Пьер впереди Жака или наоборот.

Другими словами, в 23 случаях, когда Бернар шел впереди Пьера, Бернару удалось занять 17 первых мест, тогда как в 25 случаях, когда Пьер шел впереди Бернара, Пьеру удалось занять лишь 15 первых мест. Эта разница на два в числе первых мест важнее, чем разница на четыре в случаях, когда Пьер и Бернар стояли в том или другом порядке на втором и третьем местах.

6

1. Разрежем равносторонний треугольник ABC по одной из его медиан AD (рис. 40). Половину ADC этого треугольника переместим в положение AEB так, чтобы при этом образовался прямоугольник $ADBE$. Отношение сторон этого прямоугольника меньше двух; следовательно, его можно преобразовать в квадрат, разрезав на три части.

Однако диагональ AB, позволяющая преобразовать треугольник в прямоугольник, проходит через две из этих частей.

В итоге мы перешли от треугольника ABC к квадрату $AFGH$ с помощью разрезания на пять частей.

2. Прямоугольный треугольник можно преобразовать в прямоугольник, разрезав его предварительно по средней линии AB (рис. 41).

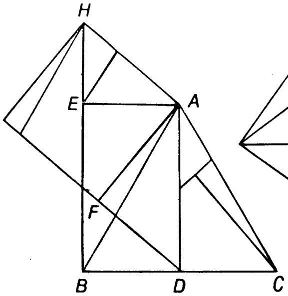


Рис 40

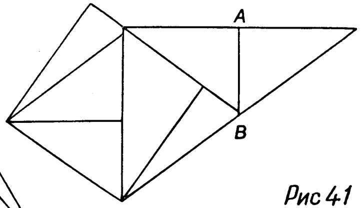


Рис 41

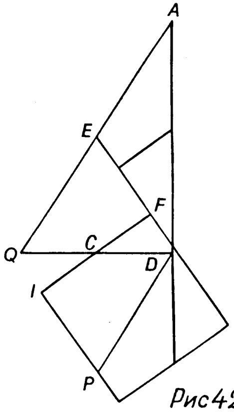


Рис 42

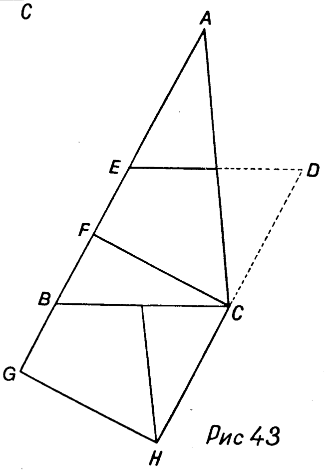


Рис 43

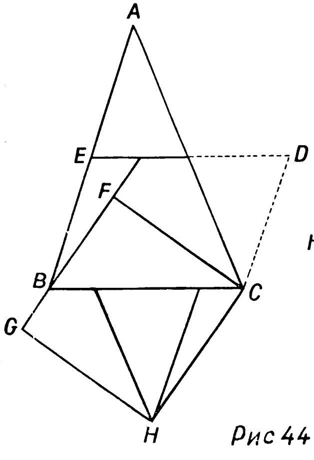


Рис 44

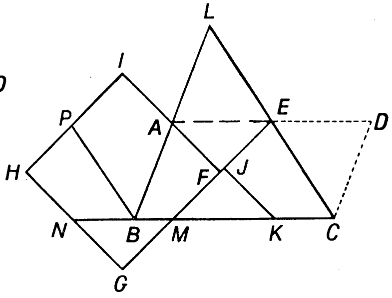


Рис 45

В свою очередь прямоугольник, разрезав его на три части, можно преобразовать в квадрат. В итоге мы преобразуем в квадрат исходный треугольник (рис. 41).

3. Прямоугольный треугольник, изображенный на рис. 10, можно преобразовать в прямоугольник $ABCD$, представленный на рис. 28, а последний — в квадрат $CFHG$. В итоге получается разрезание на пять частей.

Напротив, если воспользоваться разрезанием, изображенным на рис. 32, то мы получим только четыре части.

В самом деле, две части, CEQ и CEF, можно объединить в одну, которая займет в квадрате положение $CDPI$ (рис. 42).

4. На самом деле треугольник, изображенный на рис. 11, не произволен.

Сначала этот треугольник ABC (рис. 43) можно преобразовать в параллелограмм $BCDE$, который имеет две особенности:

отношение длины его основания к высоте меньше 2;

он принадлежит к категории параллелограммов, представленных на рис. 35, которые удается преобразовать в квадрат, предварительно разрезав его всего на две части.

Следовательно, треугольник ABC можно преобразовать в квадрат $CFGH$, разрезав его только на три части.

5. Треугольник ABC (рис. 44) можно преобразовать в параллелограмм $BCDE$, у которого отношение основания к высоте меньше 2.

Следовательно, этот параллелограмм можно преобразовать в квадрат, разрезав на три части, как было показано на рис. 36.

В итоге треугольник ABC удается преобразовать в квадрат $CFGH$, разрезав его на четыре части.

Такое разрезание нельзя осуществить в случае треугольника произвольного типа. В самом деле, необходимо, чтобы у параллелограмма $BCDE$ отношение основания к высоте было меньше 2. Для исходного треугольника это означает, что по крайней мере длина одной из его высот h должна быть заключена между длиной a стороны, на которую эта высота опускается, и удвоенной длиной этой стороны:

$$a \leqslant h \leqslant 2a.$$

6. Треугольник BCL можно преобразовать в параллелограмм $ABCD$ (рис. 45).

Высота этого параллелограмма меньше половины стороны BC.

Следовательно, здесь можно применить разрезание, представленное на рис. 37 и содержащее четыре части, которое приводит к квадрату $FGHI$.

Отрезок AE, участвующий в разрезании, которое позволяет перейти от треугольника к параллелограмму опущен; часть $AFEL$ переходит в $ABPI$.

При этом разрезании A и N — середины сторон FI и GH квадрата. Напротив, M и P не совпадают с серединами соответствующих сторон.

$$AF = AI = NH = NG = JK,$$

$$MG > MF, \ PI > PH;$$

$$PI = MG = EF = MJ$$

и

$$MF = PH = EJ.$$

8

1. Каждая монета или тяжелая, или легкая. Следовательно, всего имеется 64 возможных распределения весов этих монет, причем два распределения (когда все монеты легкие и когда все они тяжелые) нужно исключить, поскольку они противоречат условиям задачи.

Таким образом, остается 62 распределения. Но с помощью четырех взвешиваний можно априори выбрать одну из 81 возможности. Поэтому *четырех* взвешиваний должно быть достаточно.

Поскольку число 62 заметно меньше 81, можно рассчитывать, что задача будет иметь много решений. Вот одно из них:

2. Пять монет обеспечивают 30 различных возможных распределений «тяжелые — легкие»:

L L L L l	L L L l l	L L l l l	l l l l L
L L L l L	L L l L l	L l L l l	l l l L l
L L l L L	L l L L l	L l l L l	l l L l l
L l L L L	l L L L l	L l l l L	l L l l l
l L L L L	L L l l L	l L L l l	L l l l l
	L l L l L	l L l L l	
	l L L l L	l L l l L	
	L l l L L	l l L L l	
	l L l L L	l l L l L	
	l l L L L	l l l L L	

Но три взвешивания позволяют лишь выбрать одну из 27 возможностей.

Следовательно, с помощью всего лишь трех взвешиваний отыскать нужное распределение «тяжелые — легкие» для пяти монет заведомо *невозможно.*

3. Каждая монета или тяжелая, или легкая.

Поскольку у нас имеется n монет, число возможностей равно 2^n.

Как и в задаче 1, из этого числа нужно исключить два распределения, когда все монеты оказываются легними или все они — тяжелые. Таким образом, остается $2^n - 2$ возможностей.

Пусть m таково, что

$$3^{m-1} < 2^n - 2 \leqslant 3^m$$

С помощью $(m - 1)$ взвешиваний можно в лучшем случае выбрать одну из 3^{m-1} возможностей

Поэтому в нашем случае потребуется не менее m взвешиваний. Снова заметим, что речь идет о *минимуме*; если $2^n - 2$ достаточно близко к 3^m, то m взвешиваний может и не хватить. В самом деле, нельзя быть уверенным, что найдется способ взвешивания, позволяющий на каждом этапе разбивать множество остающихся возможностей на три равные по численности группы.

Можно составить следующую таблицу:

Число монет	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Возможности (2^n-2)	2	6	14	30	62	126	254	510	1022
Наименьшая степень 3 х, превышающая 2^n-2	3	3^2	3^3	3^4	3^4	3^5	3^6	3^6	3^7
Минимальное число взвешиваний	1	2	3	4	4	5	6	6	7

Однако мы не можем быть уверенными, что во всех случаях нам обязательно хватит указанного числа взвешиваний.

4. Можно узнать априори, легко или трудно будет решить поставленную задачу.

Вновь перепишем двойное неравенство из предыдущей задачи

$$3^{m-1} < 2^n - 2 \leqslant 3^m.$$

Если $2^n - 2$ близко к 3^m, то решать задачу будет трудно, поскольку потребуется найти способ взвешивания, где возможные распределения на каждом этапе разбивались бы на равные или почти равные по численности группы.

Напротив, когда, как в настоящем случае, $2^n - 2$ близко к 3^{m-1}, задача решается достаточно легко.

$2^8 - 2 = 254$ близко к $3^5 = 243$. Поэтому при выборе способа взвешиваний (а мы должны обойтись *шестью* взвешиваниями) имеется достаточный произвол и возможности можно распределять по группам относительно свободно.

Если говорить о практической стороне дела, то мы можем, например, взять шесть первых монет и расклассифицировать их с помощью четырех взвешиваний, как это описано в решении задачи 1.

Пятое и шестое взвешивания будут состоять в том, чтобы сравнить седьмую и восьмую монеты с какой-нибудь из шести первых монет.

5. Имеется $2^{12} - 2 = 4094$ возможностей — число, заключенное между $3^7 = 2187$ и $3^8 = 6561$. Поэтому нам потребуется заведомо не менее *восьми* взвешиваний.

Так, шесть первых монет можно расклассифицировать за четыре взвешивания, а затем то же проделать с остальными шестью монетами.

В случае когда одна из двух групп окажется состоящей из шести одинаковых монет, это удастся установить с помощью трех взвешиваний

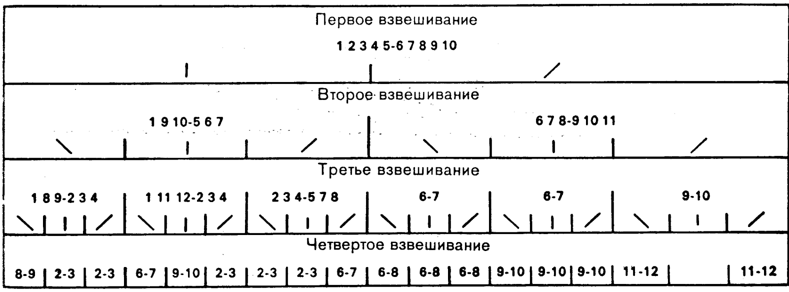
Следовательно, останется возможность сравнения одной из этих шести монет с одной из шести других (одно взвешивание).

6. Если при первом взвешивании весы окажутся в равновесии, то у нас останется 26 возможностей — число, очень близкое к 27.

Требуется найти способ взвешивания, при котором на втором этапе возможности разбивались бы на три группы по 9, 9 и 8 возможностей, что позволяет решить оставшуюся нам задачу всего лишь за три взвешивания.

Как и в задаче 11 из гл. 4, для этого следует образовать шесть групп монет из десяти монет, участвовавших в первом взвешивании: a_1 и b_1, остающиеся на прежних чашах; a_2 и b_2, которые переносят на другую чашу; и a_3 и b_3, которые снимают с весов. Мы видим, что решение подобных задач на взвешивание требует не одной только интуиции, но в равной мере и трезвого размышления: тщательный анализ задачи, исследование числа возможностей и выводы, касающиеся способа взвешивания, требуют подсчета, а не интуитивного озарения.

Интуиция вступает в дело далее, когда мы хотим, например, определить a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 так, чтобы 26 возможностей (когда весы остаются при первом взвешивании в равновесии) распределились при втором взвешивании по группам из 9, 9 и 8 возможностей. Решение приведено в следующей таблице:



7. Вот решение, содержащее пять взвешиваний:

9

1. Условиям (1) и (3) удовлетворяют только названия следующих животных: ЛАНЬ, ТИГР, ЛАМА и ЛИСА (читатель может без труда убедиться в этом, вооружившись русским алфавитом). Но ЛИСА и ЛАМА не удовлетворяют условию (2), а ТИГР — условию (4).

Следовательно, искомое животное — это ЛАНЬ.

А при чем же здесь тигр? Но где Жанно мог увидеть лань? Только в зоопарке. А если так, то, по-видимому, и тигр там где-то неподалеку.

2. «Столбики» сложений выглядят следующим образом:

$$+\begin{array}{r}438\\219\\\hline 657\end{array} \quad \text{и} \quad +\begin{array}{r}234\\657\\\hline 891\end{array}$$

Шут подписался своим именем Лоик (Loïc), но записанным в обратном порядке.

3. Пусть сложение имеет вид

$$+\begin{array}{r}abc\\def\\\hline ghi\end{array}$$

Предположим, что при данном сложении нам ни разу не приходилось оставлять какие-либо цифры «в уме». Так как в этом случае ни одна из девяти (разных) букв a, b, c, ..., i не означает 0, то

$$a+b+c+d+e+f=g+h+i,$$
$$a+b+c+d+e+f+g+h+i=45.$$

Если

$$a+b+c+d+e+f=A \text{ и } g+h+i=B,$$

то два предыдущих уравнения примут вид

$$A=B \text{ и } A+B=45,$$

откуда следует, что A и B не могут быть целыми.

Предположим теперь, что у нас дважды оставалась 1 «в уме»; тогда (почему и здесь ни одна из букв $a, b, \ldots, i$ не означает 0 ?)

$$c + f = 10 + i,$$
$$1 + b + e = 10 + h,$$
$$1 + a + d = g.$$

Значит, в этом случае (при прежних обозначениях)

$$A = B + 18 \text{ и } A + B = 45,$$

что вновь приводит к нецелым значениям A и B.

Следовательно, 1 оставалась у нас «в уме» лишь один раз, что приводит к равенствам

$$A = B + 9 \text{ и } A + B = 45,$$

откуда

$$A = 27,\ B = 18.$$

Сумма цифр ответа всегда равна 18.

4. На шахматной доске можно расположить 68 пешек, как это изображено на рис. 46.

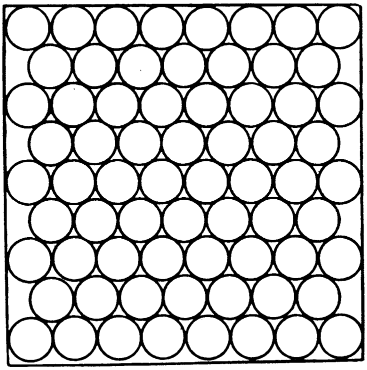


Рис 46

5. $29\,400 = 24 \cdot 25 \cdot 49.$

Искомые числа — 24 и 25.

6. Если n — полный квадрат, то у него должен быть 21 делитель; в противном случае число делителей должно равняться 22.

Но если $n = a^m \cdot b^p \cdot c^q \ldots$, то число делителей числа n равно

$$(m+1)(p+1)(q+1)\ldots.$$

(Почему?) А поскольку 21 и 22 равны произведению самое большее, двух чисел, то $q = 0$ и $n = a^m b^p$

Наименьшее число получается при

$$m = 6, \ p = 2, \ a = 2, \ b = 3.$$

Следовательно, наименьшее число пешек — 576.

7. Следующая таблица показывает соответствие между цифрой единиц некоторого числа и цифрой единиц его степеней:

	Квадрат	Куб	Четвертая степень	Пятая степень
1	1	1	1	1
2	4	8	6	2
3	9	7	1	3
4	6	4	6	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	9	3	1	7
8	4	2	6	8
9	1	9	1	9
0	0	0	0	0

Из этой таблицы видно, что цифра единиц у числа и у его пятой степени всегда *одна и та же.* Поэтому последняя цифра искомого числа равна 8.

Легко видеть, что 80^5 превышает 3 миллиарда, а 90^5 — 6 миллиардов.

Искомое число заключено между 80 и 90 Но поскольку мы уже знаем, что оно оканчивается на 8, то речь может идти только о числе 88.

Этот метод используют фокусники для вычисления корня пятой степени из числа, совпадающего с пятой степенью некоего целого числа.

8. У миллиарда четырнадцать пятизначных делителей. Среди них только 50 000 удовлетворяет заданным условиям.

9. Длина надела Жана удовлетворяет уравнению

$$x^3 - 5000x^2 - 25019x - 30030 = 0,$$

корни которого равны —2, —3 и 5005.

Значит, длина надела у Жана равна 5005 м, а у Поля — 8303 м. Теперь нужно решить уравнение в целых числах:

$$8303p = 5005q \pm 1$$

Общий метод решения уравнений такого типа приведен у Баше де Мезириака[1] Воспользовавшись им, мы находим следующие два решения:

$$\begin{cases} p = 302 \\ q = 501 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} p = 4703 \\ q = 7802. \end{cases}$$

[1] Общий метод решения таких задач был известен еще Диофанту Александрийскому (скорее всего III в. н. э.), автор ссылается здесь на знаменитую книгу «Приятные и занимательные задачи» (Problèmes plaisants et délectubles, 1612 г., 2-е издание — 1624 г.) Баше де Мезириака (Claude Gaspard Bachet de Méziriac, 1581—1638), переизданную не так давно во Франции издательством *Albert Blanchard ed.* Этот метод состоит в следующем. Наше уравнение можно переписать так:

$$3298p = 5005(q - p) \pm 1 \text{ или } 3298p = 5005q_1 \pm 1,$$

где $q_1 = q - p$. Последнее уравнение переписывается так:

$$3298\,(p - q_1) = 1707q \pm 1 \text{ или } 3298p_1 = 1707q_1 \pm 1,$$

где $p_1 = p - q_1$, и т. д. И продолжаем так же уменьшать коэффициенты уравнения, пока один из них не станет равным 1 и мы не найдем выражение для одного неизвестного через другое; в нашем случае еще надо проследить, чтобы p и q были положительными.— *Прим. ред.*

Второе решение не подходит, так как длина участка Жана должна быть меньше 5005 м.

Итак, больший надел принадлежит Жану.

10

1. Достаточно *одного* разреза, если расположить прямоугольники так, как показано на рис. 47.

2. На рис. 48 показано решение с разбиением исходной фигуры на *четыре* части. Но две самые длинные стороны исходного (невыпуклого) шестиугольника не равны между собой — их отношение равно 48/49.

Воспользовавшись этим, можно образовать прямоугольник, у которого стороны относятся как 36/49,— и затем воспользоваться ступенчатым разрезанием. Итого у нас будет всего только *три* части (рис. 49)

3. Данная трапеция не произвольна. Она обладает тем же свойством, что и параллелограмм, изображенный на рис. 35.

Следовательно, ее можно разрезать всего лишь на три части (рис. 50).

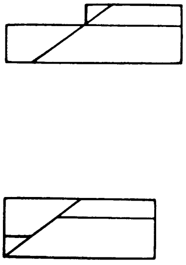


Рис 47

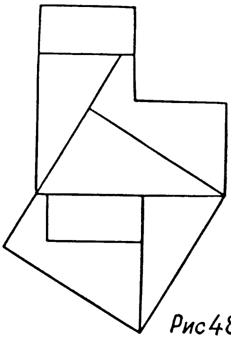


Рис 48

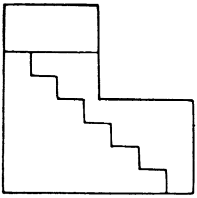


Рис 49

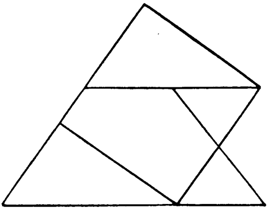


Рис 50

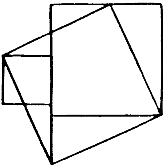


Рис 51

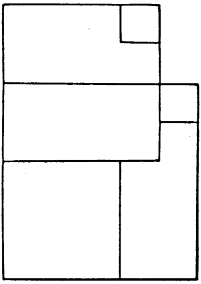


Рис 52

4. На рис. 51 изображено разрезание на *пять* частей. Если сторону меньшего квадрата принять за единицу, то сторона среднего квадрата окажется равной $\sqrt{5}$, а сторона большего квадрата — $\sqrt{6}$.

5. Разрезание, содержащее *четыре* части, изображено на рис. 52.

6. На рис. 53 представлено решение, содержащее *восемь* частей.

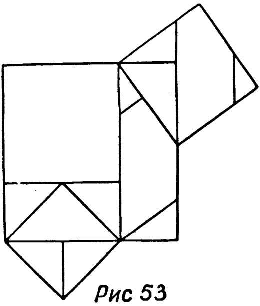


Рис 53

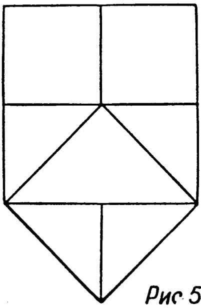


Рис 54

7. Разрезание, содержащее *пять* частей, изображено на рис. 54.

8. На рис. 55 показано разрезание на *три* части.

9. Каминную трубу невозможно (а может быть, читателю удастся нас опровергнуть?) преобразовать в квадрат, разрезав ее на три части. На рис. 56 изображено разрезание, содержащее *четыре* части.

10. На рис. 57 приводится разрезание всего лишь на *четыре* части. Это решение обладает той особенностью,

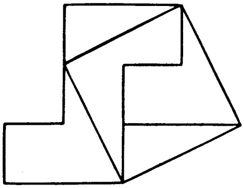


Рис 55

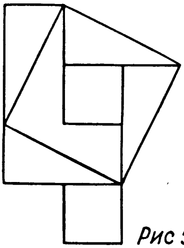


Рис 56

что переход от фигуры, изображенной на рис. 23, к квадрату осуществляется с помощью «шарнирного»

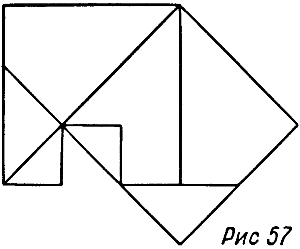


Рис 57

разрезания, т е. такого преобразования, при котором части как целое поворачиваются вокруг трех точек («шарниров» — см. рис. 58)

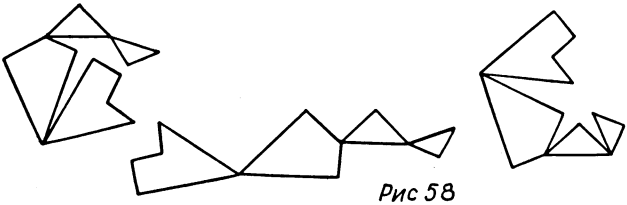


Рис 58

11. На рис. 59 показаны четыре соответствующих разрезания.

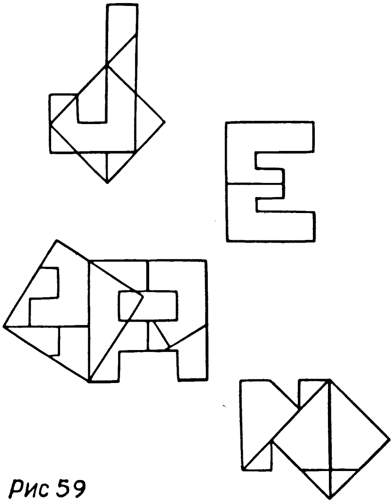


Рис 59

12. В предыдущей задаче буква J была составлена из 8 элементарных «единичных» квадратиков, а все четыре буквы состояли из 37 таких квадратиков.

Удалив один элементарный квадратик из вертикальной черты у J, мы получим 36 таких квадратиков, которые преобразуются в квадрат 6×6 с помощью преобразования, изображенного на рис. 60.

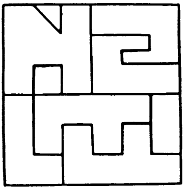


Рис 60

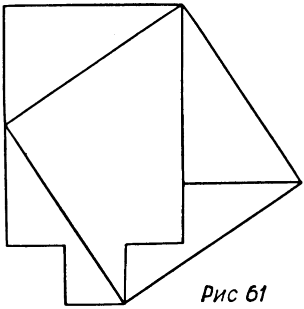


Рис 61

13. На рис. 61 показано разрезание, содержащее *три* части.

11

1. Обозначим данные предметы через 1, 2 и 3; тогда шесть возможных распределений их весов (первый предмет — самый тяжелый, последний — самый легкий) примут вид

$$
\begin{array}{ccc}
1 & 2 & 3, \\
1 & 3 & 2, \\
2 & 1 & 3, \\
2 & 3 & 1, \\
3 & 1 & 2, \\
3 & 2 & 1.
\end{array}
$$

В отличие от случаев, рассмотренных в гл. 4 и 8, весы теперь не могут оказаться в равновесии, поскольку вес всех предметов различен и нет никакого основания предполагать, что, например, вес предмета 1 равен сумме весов 2 и 3.

Таким образом, этот новый тип задач таков, что здесь одно взвешивание позволяет выбрать одну из *двух* (а не одну из *трех*) групп возможностей.

Поэтому одно взвешивание теперь позволит нам выбрать одну из двух возможностей, два взвешивания — одну из четырех возможностей, три взвешивания — одну из восьми и т. д., наконец, в общем случае n взвешиваний позволяет выбрать, самое большее, одну из 2^n возможностей.

В данной задаче у нас шесть возможностей. Поэтому требуется **не менее трех** взвешиваний.

При первом взвешивании мы сравниваем предметы 1 и 2. При втором взвешивании мы сравниваем предметы 1 и 3.

Если, например,

$$1 \diagdown 2 \text{ и } 1 \diagup 3,$$

то задача решена. Если же

$$1 \diagdown 2 \text{ и } 1 \diagdown 3,$$

то нам понадобится еще сравнить веса предметов 2 и 3 (третье взвешивание).

2. Имеется $4\times3\times2\times1=24$ возможных распределения четырех предметов по их весам. Так как 4 взвешивания помогают выбрать лишь одну из 2^4 возможностей, а 5 взвешиваний — одну из $2^5=32$ возможностей, то нам требуется **не менее пяти** взвешиваний.

Три первых взвешивания позволяют расположить по весу три первых предмета, как было показано в предыдущей задаче. Если, например, мы получили порядок

$$1 \setminus 2 \setminus 3,$$

то при четвертом взвешивании мы сравним 4 и 2, и если 4 окажется тяжелее 2, то при пятом взвешивании сравним 4 с 1 (а если 4 легче 2 — сравним 4 с 3).

3. Возможных распределений n предметов имеется всего

$$n(n-1)(n-2)...4\cdot3\cdot2\cdot1=n!$$

Как мы видели, m взвешиваний позволяют в лучшем случае выбрать одну из 2^m возможностей. Значит, нужно оценить $n!$ с помощью степеней двойки. Для нас важно, что наименьшее число m взвешиваний, позволяющих во всех случаях расположить по порядку их веса n предметов — все различного веса,— не меньше, чем m, задаваемое соотношением

$$2^{m-1}<n!<2^m.$$

Составим следующую таблицу[1]:

Число предметов	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число возможностей, N	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3 628 800
Минимальное число вида 2^p, где $2^p \geqslant N$	2^1	2^3	2^5	2^7	2^{10}	2^{13}	2^{16}	2^{19}	2^{22}
Наименьшее возможное число взвешиваний	1	3	5	7	10	13	16	19	22

[1] Заметьте, что наша таблица указывает (в нижней строке) число p, такое, что меньше чем p взвешиваний во всех случаях наверняка не хватит,— но она вовсе не гарантирует, что p взвешиваний обязательно должно хватить.— *Прим. ред.*

4. Нетрудно видеть, что число оставшихся возможностей равно

$$\frac{8!}{4!4!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=70.$$

Но с помощью шести взвешиваний можно выбрать всего лишь одну из $2^6=64$ возможностей.

Следовательно, данные восемь предметов не удастся расположить в порядке возрастания веса с помощью шести дополнительных взвешиваний.

5. Здесь довольно шестнадцати взвешиваний. Вот возможная процедура взвешивания.

Первое взвешивание: $1 \setminus 2$.
Второе » : $3 \setminus 4$.
Третье » : $1 \setminus 3$.

Итак, в результате трех взвешиваний мы имеем

$$1 \setminus 2 \text{ и } 1 \setminus 3 \setminus 4.$$

Четвертое взвешивание: сравниваем 5 и 3.
Пятое » : 5 сравниваем с 1 или 4.

Итак, мы расположили в нужном порядке 1, 3, 4, 5 (ср. с задачей 2).

Шестое взвешивание: 2 сравниваем со средним элементом из 3, 4, 5.

Седьмое взвешивание: 2 сравниваем с одним из крайних элементов 3, 4, 5.

Таким образом мы уже расположили в нужном порядке 1, 2, 3, 4, 5.

Восьмое взвешивание: 6 сравниваем со средним элементом 1, 2, 3, 4, 5.

Девятое взвешивание: 6 сравниваем со вторым или четвертым элементом из 1, 2, 3, 4, 5.

Десятое взвешивание: 6 сравниваем с одним из крайних элементов 1, 2, 3, 4, 5.

Теперь мы расположили в нужном порядке 6 предметов: 1, 2, 3, 4, 5 и 6.

С одиннадцатого по тринадцатое взвешивание аналогично тому, как мы поступали выше, за три взвешивания находим место предмета 7 в ряду предметов 1, 2, 3, 4, 5, 6.

С четырнадцатого по шестнадцатое взвешивание: также за 3 взвешивания находим место предмета 8 среди других предметов.

6. Первое взвешивание: $1\backslash 2$.
Второе » : $3\backslash 4$.
Третье » : $1\backslash 3$.
Таким образом, после трех взвешиваний мы имеем

$$1\backslash 2 \text{ и } 1\backslash 3\backslash 4.$$

Четвертое взвешивание: $5\backslash 6$.
Пятое » : $7\backslash 8$.
Шестое » : $5\backslash 7$.
Следовательно, мы получили дополнительно

$$5\backslash 6 \text{ и } 5\backslash 7\backslash 8.$$

Далее нам надо сравнить веса первых четырех и следующих четырех предметов.

Седьмое взвешивание: $1\backslash 5$.
Таким образом мы уже знаем, что

$$1\backslash 5\backslash 7\backslash 8.$$

Восьмое взвешивание: 3 сравниваем с 7.
Девятое » : 3 сравниваем с 5 или 8.
Теперь мы уже расположили в требуемом порядке предметы 1, 3, 5, 7, 8.
Далее возможны два пути.
Пусть $1\backslash 3\backslash 5\backslash 7\backslash 8$.
В этом случае уместно
десятое взвешивание: 4 сравниваем с 7
Одиннадцатое » . 4 сравниваем с 5 или 8.
Мы уже расположили в нужном порядке 1, 3, 4, 5, 7, 8.

Двенадцатое взвешивание: 6 сравниваем со средним элементом из группы 4, 7, 8.

Тринадцатое взвешивание: 6 сравниваем с крайним элементом из 4, 7, 8.
Если же $5\backslash 3$, то
десятое взвешивание: 6 сравниваем со средним элементом из 3, 7, 8.

Одиннадцатое » : 6 сравниваем с одним из крайних элементов 3, 7, 8.

Двенадцатое » : 4 сравниваем со средним элементом из 6, 7, 8.

Тринадцатое » · 4 сравниваем с крайними элементами из 6, 7, 8.

В обоих этих случаях мы расположили по весу предметы 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 за 13 взвешиваний.

Далее мы за 3 взвешивания сравниваем предмет 9 сначала с четвертым элементом из 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, затем со вторым или с шестым, далее с первым, с третьим, с пятым или с седьмым.

Наконец, мы сравниваем 2 с элементами, которые легче 1, так же, как мы это делали с предметом 9, произведя, самое большее, три взвешивания.

7. Ответ приведен в следующей таблице:

<table>
<tr><td rowspan="2">Первое взвешивание</td><td colspan="6">1-2</td></tr>
<tr><td colspan="2">|</td><td colspan="4">\</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Второе взвешивание</td><td colspan="2">2-3</td><td colspan="4">3-4</td></tr>
<tr><td colspan="2">\</td><td colspan="4">| | \</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Третье взвешивание</td><td colspan="2">3-4</td><td colspan="2">2-3</td><td colspan="2">1-3</td></tr>
<tr><td>\</td><td>/</td><td>\</td><td>/</td><td>I</td><td>\</td></tr>
<tr><td>Четвертое взвешивание</td><td></td><td>2-4</td><td></td><td>1-3</td><td>2-4</td><td></td></tr>
</table>

8. Одно взвешивание может состоять в том, что на каждую чашу кладутся либо по одной, либо по две монеты.

Для того чтобы решить задачу не более чем за пять взвешиваний, необходимо, чтобы после первых двух взвешиваний оставалось не более двадцати семи возможностей.

Посмотрим, что можно сделать за два первых взвешивания. Здесь удается обнаружить восемь различных случаев.

В шести случаях после первых двух взвешиваний остается больше двадцати семи возможностей. Значит, в этих шести случаях не более чем за пять взвешиваний задачу решить нельзя. Эти случаи перечислены в следующей таблице:

Случаи	Первое взвешивание	Второе взвешивание
Первый	1—2	1—3
Второй	1—2	1 3—2 4
Третий	1—2	1 3—4 5
Четвертый	1 2—3 4	1 2—3 5
Пятый	1 2—3 4	1 3—2 4
Шестой	1 2—3 4	1 3—2 5

Остаются два последних случая:

Случаи	Первое взвешивание	Второе взвешивание
Седьмой	1—2	3—4
Восьмой	1—2	1 2—3 4

Но и здесь, если весы ни при первом, ни при втором взвешивании не окажутся в равновесии, нам все равно не удается решить задачу во всех случаях за пять взвешиваний.

Следовательно, здесь потребуется минимум *шесть* взвешиваний. Этого числа взвешиваний уже оказывается достаточно: их можно осуществить в следующем порядке.

В первых двух взвешиваниях мы сравниваем монеты сначала 1 и 2, затем 3 и 4. Если весы останутся в равновесии при одном из этих взвешиваний, то все сведется к задаче с четырьмя монетами, и мы упорядочим пять монет за пять взвешиваний.

Исследуем теперь случай, когда
при первом взвешивании 1\2,
при втором взвешивании 3\4.

При третьем взвешивании мы сравниваем 1 и 3. Если весы не останутся в равновесии, то, скажем, при

1\3

мы имеем

1\3\4.

Монета 3 — это средняя по весу монета. При четвертом и пятом взвешиваниях мы сравниваем 2 и 5 с 3.

Если весы при третьем взвешивании останутся в равновесии, то при четвертом взвешивании мы сравним 2 и 4. Если весы теперь не останутся в равновесии, то мы получим, скажем,

1 | 3,

откуда

1\2\4.

При пятом взвешивании мы сравним 5 и 2.

Если же весы снова останутся в равновесии, то

1\2, 1 | 3 и 2 | 4.

При пятом взвешивании мы сравниваем 5 и 1 и, если потребуется, при шестом — 5 и 2.

9. Первое взвешивание может состоять в том, что сравниваются две монеты (1—2), четыре монеты (1 2—3 4) или шесть монет (1 2 3—4 5 6).

1. В случае когда сравниваются две монеты, если весы при первом взвешивании останутся в равновесии, то все сведется к предыдущей задаче, и, следовательно, нам потребуется семь взвешиваний.

2. В случае когда сравниваются четыре монеты, если при первом взвешивании весы сохранят равновесие, то останется 66 возможных распределений монет по весу.

Но до первого взвешивания общее число возможностей равнялось 540.

Значит, число возможностей в случае 1 2\3 4 по меньшей мере равно

$$\frac{540-66}{2}=237$$

К этому числу следует добавить число неопределенных случаев, когда оказывается·

на правой чаше весов пара Ll и еще одна монета,

на левой чаше пара nn монет среднего веса и монета одинаковая по весу с третьей монетой на правой чаше

Поскольку мы не знаем, тяжелее или легче пара L пары nn, эти неопределенные случаи следует считать дважды. Другими словами, в этих неопределенных случаях указание того, в какую сторону отклонились весы фактически не дает нам никакой новой информации

Число возможностей, оставшихся после первого взвешивания (результат которого 1 2\3 4), превышает $3^5=243$.

Следовательно, когда при первом взвешивании сравниваются четыре монеты, нам также требуется не менее семи взвешиваний.

3. В случае когда сравниваются шесть монет, если при первом взвешивании весы окажутся в равновесии то останется тридцать шесть возможных распределений монет по весу.

В случае когда весы отклонятся вправо, число возможностей, оставшихся после первого взвешивания равно, самое меньшее,

$$\frac{540-36}{2}=252.$$

Это число превышает 243; следовательно, если также и при первом взвешивании сравниваются шесть монет, то нам необходимо не менее семи взвешиваний.

4. Как же можно решить задачу за *семь* взвешиваний?

Шесть первых взвешиваний выполняются так же, как и в предыдущей задаче, за исключением случая, когда при одном из трех первых взвешиваний весы остаются в равновесии. В этом случае мы реально попадаем в ситуацию предыдущей задачи.

Если же, напротив, после трех первых взвешиваний мы получим

$$\begin{gathered}1 \backslash 2,\\ 3 \backslash 4,\\ 1 \backslash 3,\end{gathered}$$

то среди первых четырех монет имеются монеты каждого типа — и при седьмом взвешивании мы сравниваем монету 6 с монетой, средней по весу.

10. Две средние по весу монеты уравновешивают одну тяжелую и одну легкую монету.

При первом взвешивании сравнивают монеты 1 и 2.

Если весы остаются в равновесии, то все сводится к задаче с четырьмя монетами, которая решается за четыре дополнительных взвешивания.

Если весы отклоняются влево, то при втором взвешивании сравнивают 3 и 4. Если весы остаются в равновесии, то все снова сводится к задаче с четырьмя монетами, и искомое распределение веса монет удается найти всего за пять взвешиваний.

Если весы вновь отклоняются влево, то при третьем взвешивании сравниваются монеты 1 2 и 3 4. Если весы остаются в равновесии, то это означает, что монеты 1 и 3 одинаковы по весу, как и монеты 2 и 4 одинаковы между собой. Все сводится к задаче с тремя монетами, и искомое распределение веса монет удается найти всего за пять взвешиваний.

Если результат трех первых взвешиваний был следующим:

$$1\backslash 2,$$
$$3\backslash 4,$$
$$1\ 2\backslash 3\ 4,$$

то для четырех первых монет остаются три возможности

$$Ln\ \ Ll$$
$$Ln\ \ nl$$
$$Ll\ \ nl$$

При четвертом взвешивании сравниваются 1 4 с 2 3, что позволяет выбрать одну из трех возможностей. Таким образом, четыре первые монеты оказываются упорядоченными по весу.

При пятом взвешивании пятую монету сравнивают с монетой, средней по весу.

То, что тяжелая и легкая монеты уравновешивают две монеты среднего веса, позволяет при четвертом взвешивании выбрать одну из **трех** возможностей; этого не получится, если веса монет произвольны.

12

1. После двух переливаний количество жидкости в обоих стаканах остается одинаковым. Поэтому количество вина, перелитое из стакана с вином в результате наших двух операций, равно,

с одной стороны, количеству вина, влитому в стакан с водой;

с другой стороны, количеству воды, дополняющему до полной меры стакан с вином.

Таким образом, количество вина в воде *равно* количеству воды в вине.

2. Поскольку третий пассажир заплатил за обед 8 франков, то, если счесть его плату справедливой, надо будет оценить обед в 24 франка, а, значит, каждое блюдо — в 3 франка.

В таком случае первый пассажир внес еды на 15 франков, а второй — на 9 франков. Значит, первому пассажиру следует взять 7 франков, а второму — 1 франк.

3. Премьер-министр вытащил листок бумаги и, не глядя на него, скатал из него шарик — и проглотил.

Поскольку на оставшемся листке стояло «Уходите», то королю пришлось признать, что на проглоченном листке значилось «Останьтесь».

4. На второй день кувшинка принимает размер двух кувшинок. Поэтому две кувшинки покроют озеро за месяц минус один день.

5. Форма, в которую облечено условие задачи, выбрана так, чтобы запутать читателя; на самом же деле никакой проблемы тут нет. 30 франков, которые заплатили путешественники, распределились следующим образом: 25 франков осталось у хозяина, 2 франка забрал себе мальчик и 3 франка вернулось к путешественникам.

6. Осужденный сказал: «Меня сожгут заживо».

Если это правда, то его следует отравить. Но в таком случае это ложь. Если же это ложь, то его должны сжечь заживо — но тогда это правда.

Осужденного помиловали.

7. 1 089 709, деленное на 12, равно 90 809; в остатке остается 1.

8. Два пешехода встретятся через час. Значит, муха пролетит в общей сложности 14 км.

9—10. В первом случае, когда заключенных выстраивают «гуськом», цвет своего кружка определяет первый заключенный (тот, что не видит кружки на спинах остальных). Он рассуждает следующим образом: поскольку третий заключенный, который видит два кружка, молчит, эти два кружка не могут быть оба черного цвета. Если бы второй заключенный видел, что у меня черный кружок, он знал бы, что у него самого — белый, поскольку третий заключенный не говорит, что у него белый кружок. Значит у меня белый кружок.

В случае когда заключенные могут свободно видеть два «чужих» кружка, если бы у одного из них был черный кружок, два других определили бы, что у них белые кружки, ибо в противном случае тот, у кого оказался бы белый кружок, немедленно заявил бы об этом.

Следовательно, у всех трех заключенных белые кружки.

11. Самое простое решение состоит в том, чтобы перейти к пятеричной системе счисления, ибо цена каждой медали равна целой степени пяти. В пятеричной системе счисления число 9615 записывается как 301 430, т. е.

$$9615=3\cdot5^5+0\cdot5^4+1\cdot5^3+4\cdot5^2+3\cdot5^1=$$
$$=2\cdot3125+5\cdot625+1\cdot125+4\cdot25+3\cdot5.$$

Жан заплатил за свою медаль 125 франков, Поль — 3125, Пьер — 5, Жак — 225 и Клод — 625 франков.

12. Узник спрашивает одного из двух слуг: «Если бы я попросил твоего товарища указать мне «дверь свободы», то что бы он мне ответил?»

В обоих случаях слуга укажет на «дверь рабства».

13. Разложим $2450=7^2\cdot5^2\cdot2$ в произведение трех множителей. При этом мы получим многочисленные возможности для возрастов трех человек, соответствующие разным суммам возрастов. Поскольку пономарь знает свой возраст, то, удвоив его, он может найти эту сумму.

Раз он не смог найти единственное решение, то стоящая перед ним задача оказалась имеющей несколько возможных решений. Изучив, какие именно значения может принимать сумма трех возрастов, мы находим, что только сумма 64 обладает требуемым свойством; ей отвечают разложения

$$49+10+5=64$$

и

$$50+7+7=64$$

в сумму трех слагаемых, произведение которых равно 2450.

Следовательно, пономарю 32 года.

Уточняя, что лишь один из трех человек старше его, кюре дал пономарю указание, позволяющее выбрать одно из этих двух решений.

Поэтому кюре 49 лет.

14. Две крайние клетки одной диагонали (обычной) шахматной доски имеют один цвет. Каждая костяшка домино обязательно покрывает одну белую и одну черную клетку. Значит, 31 костяшка домино заведомо может покрыть всю доску, за исключением клеток *разного* цвета.

Поэтому наша задача **не имеет** решения.

15. Вот это сложение

$$\begin{array}{r} 69\,656 \\ +\;96\,078 \\ \hline 165\,734 \end{array}$$

16. Задачу можно решить с помощью тригонометрии[1], обозначив через a, b и c три стороны треугольника, через A — величину тупого угла[2] и через S — площадь треугольника. Тогда

$$a^2=505,\ b^2=233,\ c^2=52$$

и

$$a^2=b^2+c^2+2bc\cos A.$$

Следовательно,

$$2bc\cos A=220,$$
$$b^2c^2=b^2c^2\cos^2 A+b^2c^2\sin^2 A,$$
$$S=bc\sin A/2=2\text{ га}.$$

Однако можно также воспользоваться тем, что каждый из трех заданных квадратов представим в виде суммы двух квадратов:

$$505=19^2+12^2,\ 233=13^2+8^2,\ 52=6^2+4^2.$$

Далее достаточно нарисовать рис. 62, чтобы стало понятно, что площадь искомого треугольника можно найти

---

[1] Прямое решение «в лоб» — с помощью так называемой *формулы Герона*

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad \text{где } p=(a+b+c)/2,$$

для площади треугольника со сторонами a, b и c приводит здесь к неоправданно громоздким выкладкам.— *Прим. ред.*

[2] Так как $a^2>b^2+c^2$, то противолежащий стороне a угол A — тупой.— *Прим. ред.*

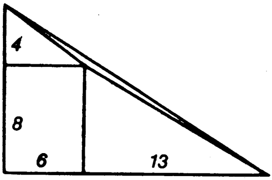


Рис 62

как определенную разность площадей. А именно эта площадь равна

$$\frac{19\cdot 12}{2}-\frac{13\cdot 8}{2}-8\cdot 6-\frac{4\cdot 6}{2}=2.$$

17. Зебра принадлежит итальянцу.

18.
$$451\,066=2\cdot 7\cdot 11\cdot 29\cdot 101.$$

Последним днем месяца может быть только 29. Значит, речь идет о феврале високосного года.

Длина протазана может равняться только 7 футам. Остаются три множителя: 2, 11 и 101.

Есть две возможности. Первая: 101 равно половине числа лет, протекших с момента гибели солдата до обнаружения могилы. Но, с одной стороны, между 1712 и 1716 годами протазаны уже не использовались, и, с другой стороны, в этот период Франция не совершала походов в чужие земли.

Тогда остается вторая возможность: половина протекших лет равна 202, а главнокомандующему было 22 года.

В 1512 г. произошла битва при Равенне, в которой французскими войсками командовал Гастон де Фуа, родившийся в 1489 г.

19. Если бы был только один обманутый муж, то он выгнал бы свою жену в первое же утро, не зная более никакой неверной жены и будучи уверен (ибо султан не лгал), что, по крайней мере одна неверная жена есть.

Если бы обманутых мужей было двое, то каждый из них, зная, что другой обманут, ожидал бы, что тот утром прогонит свою жену. Но поскольку этого не произошло, он понял бы, что второй муж оказался в том же положении, что и он сам, и тоже ждал, когда первый прогонит свою жену Значит, неверных жен двое, одна из которых его собственная. Поэтому два обманутых мужа прогнали бы своих жен на второе утро.

Точно так же если бы обманутых мужей оказалось трое, то каждый из них, зная об измене жен двух остальных, ожидал бы, что они их прогонят на второе утро. Поскольку этого не произошло, каждый из них сделал бы вывод, что есть третья неверная жена — и ей может быть только его собственная жена. Следовательно, три мужа прогнали бы своих жен на третье утро.

Рассуждая и далее таким образом, мы приходим к выводу, что сорок обманутых мужей должны прогнать своих жен на сороковое утро.

20. Обозначим через i искомое число дней, через p — первоначальное количество травы на каждом акре и через q — дневной прирост травы на каждом акре. Тогда количество травы, съедаемое каждой коровой за один день, можно выразить тремя различными способами:

$$\frac{pc+qcb}{ab}=\frac{pf+qfe}{de}=\frac{ph+qih}{gi}.$$

Разделив эти соотношения на p, мы получим два уравнения с двумя неизвестными q/p и $1/i$, откуда можно определить i.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Вычисление дня недели

Основная идея метода, позволяющего вычислить день недели, проста. Для текущего XX века она сводится к тому, чтобы подсчитать, сколько прошло дней с 1 января 1900 г.— запомним, что этот день был понедельником.

При подсчете каждому дню недели ставится в соответствие число, равное его порядковому номеру, а именно:

понедельник	—	1
вторник	—	2
среда	—	3
четверг	—	4
пятница	—	5
суббота	—	6
воскресенье	—	7 или 0.

Так, например, пятница — пятый день недели, и ей соответствует число 5.

Предположим, нам надо узнать, на какой день недели приходилось определенное число, скажем 24 января 1900 г. Мы должны поступить следующим образом:

1 января 1900 г.— это понедельник, 8-е, 15-е и 22-е — тоже.

Значит, 23 января — вторник, а 24-е — среда.

Итак, поскольку

$$24-21=3,$$

то 24 января 1900 г. пришлось на третий день недели, т. е. на среду.

Произведем первое упрощение: *заменим каждое число, большее 7, остатком*[1] *от его деления на 7.*

[1] Математики вместо слов «остаток от деления на 7» говорят *вычет по модулю 7*. — *Прим. ред.*

Чтобы определить дни недели в феврале 1900 г., следует заметить. что в январе 31 день, но $31=28+3$ и, значит, сдвиг февраля относительно января составил 3 дня.

1 января 1900 г.— понедельник, первый день недели.

1-е февраля пришлось на четвертый день недели, четверг.

Чтобы узнать, например, на какой день недели пришлось 17 февраля 1900 г., достаточно прибавить к этой дате сдвиг февраля относительно января и результат разделить на 7:

$17+3=20$, что после деления на 7 дает в остатке 6; значит, 17 февраля пришлось на шестой день недели — субботу.

Такие подсчеты можно провести для каждого месяца и выписать таблицу сдвигов каждого из этих месяцев относительно января.

Таким образом, мы получим двенадцать коэффициентов:

январь	— 0
февраль	— 3
март[1]	— 3
апрель	— 6
май	— 1
июнь	— 4
июль	— 6
август	— 2
сентябрь	— 5
октябрь	— 0
ноябрь	— 3
декабрь	— 5

Чтобы проводить вычисление дня недели в уме, очевидно, необходимо запомнить эти коэффициенты с помощью какого-нибудь мнемонического правила.

Допустим, мы хотим определить, на какой день недели пришлось 15 июля 1900 г. Прибавим к этой дате коэффициент июля и результат разделим на 7:

$15+6=21$, что после деления на 7 дает в остатке 0; значит, 15 июля 1900 г.— воскресенье.

[1] Заметьте, что в феврале 1900 г было $28(=7\cdot4)$ дней (високосными являются годы, порядковые номера которых делятся на 4, но *не делятся на 100*, или делятся сразу на 400); поэтому февралю и марту отвечают одинаковые коэффициенты.—*Прим. ред.*

Теперь мы можем определить, на какой день недели приходилась любая дата 1900 г. Перейдем к следующему году.

В обычном (не високосном) году 365 дней. 365 после деления на 7 дает в остатке 1. Таким образом, 1901 г. по сравнению с 1900 г. дает сдвиг на один день.

Пусть нам нужно определить, на какой день недели пришлось 15 марта 1901 г.:

$15+3+1=19$, что после деления на 7 дает в остатке 5. Следовательно, это была пятница.

Так же мы поступаем и в случае 1902 г. (сдвиг в два дня по отношению к 1900 г.), и в случае 1903 г. (сдвиг в три дня).

Но 1904 г. был високосным. Поэтому до 29 февраля 1904 г. в этом году сдвиг относительно 1900 г. составлял 4 дня, а начиная с 1 марта он составлял уже 5 дней. Это можно обобщить, введя коэффициент года, который вычисляется следующим образом.

Берем две последние цифры номера года. Соответствующее двузначное число выражало бы сдвиг данного года относительно 1900 г., если бы совсем не было високосных годов. Високосные же годы дают поправку: к двузначному числу, записываемому двумя последними цифрами года, следует прибавить частное от деления этого двузначного числа на 4 (это частное равно количеству чисел 29 февраля до интересующего нас года)[1]. Как всегда, делим сумму на 7 и находим, чему равен остаток.

Пусть нам нужно определить коэффициент, отвечающий 1947 г.

$47+11=58$, что после деления на 7 дает в остатке 2. Коэффициент 1947 г. равен 2.

Определим, на какой день недели пришлось 8 октября 1947 г.:

$8+0+2=10$, что после деления на 7 дает в остатке 3. Это была среда.

Необходимо только помнить, что для первых двух месяцев високосного года из коэффициента года нужно вычесть единицу. Пусть нам нужно определить, на ка-

[1] Так, в следующем ниже примере нам приходится к числу 47 прибавить целую часть дроби 47/4, т. е. 11. (Математики обозначают *целую часть* числа прямыми скобками, в которых заключено число,— они пишут $[47/4]=11$.) — *Прим. ред.*

кой день недели пришлось 11 февраля 1936 г. Коэффициент 1936 г. равен

$36+9=45$, что при делении на 7 дает в остатке 3.

Вычисление дня, на который пришлось 11 февраля 1936 г., проводится следующим образом:

$11+3+3-1=16$, что при делении на 7 дает в остатке 2. Это был вторник.

Можно обобщить этот метод на прошедшие и будущие века, вводя коэффициент века (который для XX в. равен нулю, что упрощает выкладки).

Для последних из прошедших веков добавляется по 2 на каждый век. Так, для XIX в. коэффициент равен 2, для XVIII в.— 4, для XVII в.— 6.

Юлий Цезарь произвел реформу римского календаря (который содержал 10 месяцев по 30 дней), дабы привести его в соответствие с видимым движением Солнца. Так появился юлианский календарь, в котором на каждые четыре года приходилось по одному високосному. Год юлианского календаря был слишком длинным, в результате каждые 900 лет набегала ошибка в одну неделю.

В XVI в. дни равноденствия отстали на десять дней по сравнению с истинными. Вследствие этого папа Григорий XIII решил, чтобы следующим днем после четверга 4 октября 1582 г. была пятница 15 октября. Так был введен григорианский календарь, в котором, кроме того, были упразднены вековые високосные годы, за исключением одного из каждых четырех (1600 г. был високосным; 1700, 1800 и 1900 гг.— не високосные; 2000 г. снова будет високосным).

Григорианский календарь дает погрешность в один день на каждые 4000 лет по сравнению с истинным (тропическим) годом.

Чтобы определить коэффициент века до 1582 г., достаточно определить дополнение до 18 к первой цифре (для первых десяти веков) или к двум первым цифрам (для прочих веков) года.

Таким образом, для XVI в. этот дополнительный коэффициент равен

до 15 октября 1582 г. $18-15=3$ — можно убедиться, что 4 октября 1582 г. пришлось на четверг:

$$4+0+4+3=7+4;$$

после 4 октября 1582 г. коэффициент равен нулю, можно проверить, что 15 октября 1582 г. пришлось на пятницу:

$$15+0+4+0=14+5.$$

Чтобы найти коэффициент века для будущих веков, нужно на каждый век добавлять по 5, плюс еще по 1 на годы 2000, 2400 и т. д.

Так, коэффициент XXI в. будет равен 6. Поэтому первый день века 1 января 2001 г. придется на понедельник.

Итак, для того чтобы определить день недели, на который приходится заданная дата, нужно:

1) взять эту дату;

2) прибавить к ней коэффициент месяца (который нужно знать наизусть, если мы собираемся проводить выкладки в уме);

3) прибавить коэффициент года, который получается из последний двух цифр года, если к ним добавить частное от деления этого двузначного числа на 4;

4) и наконец, прибавить коэффициент века.

Выкладки значительно упрощаются вследствие того, что мы каждый раз рассматриваем лишь остаток от деления полученной суммы на 7. Не следует забывать, что, когда речь идет о первых двух месяцах високосного года, из общей суммы вычитается 1.

Таким образом, даже нетренированному человеку потребуется всего лишь несколько десятков секунд, чтобы определить нужный день недели.

Фокусники же затрачивают на эту процедуру не более секунды; это объясняется следующими причинами: во-первых, большая тренировка позволяет им проводить выкладки быстрее любителя и, во-вторых, они знают наизусть коэффициенты года (это, конечно, главное).

Аналогично, когда называется дата, фокусник автоматически воспринимает эту дату как остаток от ее деления на 7. Говорят «17» — фокусник думает «3». Когда говорят «июль», фокусник думает «6», складывает 6 и 3, а в памяти держит только 2. Таким образом, вычисление производится в уме по мере того, как зритель называет дату. В этом состоит секрет «трюка», которым фокусники любят поражать зрителей.

II. Умножение многозначных чисел

Пусть нам нужно умножить 93 416 на 642. Умножение осуществляется в семь этапов:

$2\times6=12$; записываем 2, а 1 запоминаем (оставляем в уме):

$$\begin{array}{r} 93\,416 \\ 642 \\ \hline 2 \end{array}$$

$2\times1=2$ плюс $4\times6=24$ плюс 1 в уме равно 27, записываем и запоминаем (оставляем в уме) 2:

$$\begin{array}{r} 93\,416 \\ 642 \\ \hline 72 \end{array}$$

$2\times4=8$ плюс $4\times1=4$ плюс $6\times6=36$ плюс 2 в уме равно 50; записываем 0 и 5 оставляем в уме:

$$\begin{array}{r} 93\,416 \\ 642 \\ \hline 072 \end{array}$$

Шесть перекрещивающихся стрелок показывают операции, выполняемые на каждом этапе.

$2\times3=6$ плюс $4\times4=16$ плюс $6\times1=6$ плюс 5 в уме равно 33; записываем 3 и 3 оставляем в уме:

$$\begin{array}{r} 93\,416 \\ 642 \\ \hline 3\,072 \end{array}$$

$2\times9=18$ плюс $4\times3=12$ плюс $6\times4=24$ плюс 3 в уме равно 57; записываем 7 и 5 оставляем в уме:

$$\begin{array}{r} 93\,416 \\ 642 \\ \hline 73\,072 \end{array}$$

$4 \times 9 = 36$ плюс $6 \times 3 = 18$ плюс 5 в уме равно 59; записываем 9 и 5 оставляем в уме:

$$\begin{array}{r} 93\,416 \\ 642 \\ \hline 973\,072 \end{array}$$

$6 \times 9 = 54$ плюс 5 в уме равно 59.

$$\begin{array}{r} 93\,416 \\ 642 \\ \hline 59\,973\,072 \end{array}$$

Метод обобщается очевидным образом на произведение любых целых положительных сомножителей. Однако, чем больше цифр у сомножителей, тем, разумеется, труднее выполнять все операции в уме — впрочем, при некоторой практике умножение производится достаточно быстро.

III. Рулетка и стратегия игры в рулетку

В рулетке имеются тридцать шесть номеров от 1 до 36 и один «особый» номер — нуль («зеро»).

Тридцать шесть номеров, которые следуют друг за другом без какого бы то ни было видимого порядка, попеременно окрашены в черный и красный цвет. Нуль — не красный и не черный: он обычно окрашен в каштановый или зеленый цвет.

Рулетка устроена так, чтобы номера выпадали случайным образом, т. е. чтобы никакой из них (или несколько из них) не имел предпочтения перед другими и не выпадал чаще остальных.

Рулетку вращает крупье, один раз в одном направлении, следующий раз в другом. На своем пути шарик встречает препятствия, вследствие чего, даже если бы крупье вращал рулетку все время строго одинаково, путь, который проделывает шарик, всегда был бы чисто случайным и обеспечивал бы строгую независимость результата от манеры вращения.

Наконец, сама рулетка сделана с очень большой точностью.

Именно по этим причинам случай и только случай определяет, какой номер выпадет в очередной раз.

ПРАВИЛА ИГРЫ

Играющий в рулетку может делать некоторую ставку «на номера», «на простые шансы» и «на сложный шанс». Поставить на номер — это значит сделать ставку на один из тридцати семи номеров. Простых шансов всего шесть:

красное и черное,

чет и нечет,

пасс («большие» номера — от 19 до 36) и манк («малые» номера — от 1 до 18).

Нуль не является ни красным, ни черным; ни четным, ни нечетным; он не входит ни в пасс, ни в манк. Сложные шансы состоят в том, что ставят:

сразу на два номера,

на трансверсаль (на три номера),

на карре (на четыре номера),

на шестерку (на шесть номеров),

на дюжину (на 12 номеров),

причем соответствующую группу номеров можно выбирать любым способом.

Соответствующие выигрыши таковы:

за простой шанс — одна ставка,

за номер — 35 ставок,

за два номера — 17 ставок,

за три номера — 11 ставок,

за четыре номера — 8 ставок,

за шесть номеров — 5 ставок,

за двенадцать номеров — 2 ставки.

Когда выпадает нуль («зеро»), ставки на простые шансы блокируются (попадают «в тюрьму»).

При этом можно

1) либо ждать следующего раза; если в следующий раз выпадает простой шанс, на который была сделана ставка, то поставленная сумма (но лишь она — без вся-

кого выигрыша) возвращается к игроку; если же этого не происходит, то ставка окончательно теряется;

2) либо сразу после выпавшего нуля потребовать у банкира возмещения половины сделанной ставки.

Максимальные ставки

Во всех случаях ставки ограничены. Это не позволяет, в частности, игроку воспользоваться системой игры, известной под названием *стратегии Д'Аламбера*[1], которую мы обсудим далее и которая позволила бы игроку во всех случаях выигрывать, хотя в целом игра, как мы это докажем ниже, выгодна для банка. При минимальной ставке 1 максимальные ставки таковы:

30 за один номер,
60 на два номера,
100 на три номера,
120 на четыре номера,
200 на шесть номеров,
500 на дюжину номеров,
1000 на простой шанс.

Математический анализ данной игры

Речь идет об игре, где в чистом виде царит случай. Поэтому здесь применима теория вероятностей, и для каждого номера есть один шанс из тридцати семи на выигрыш. Если бы не было нуля, то игра оказалась бы безобидной, т. е. шансы играющего на выигрыш и на проигрыш были бы равны. Но наличие нуля делает игру выгодной для банка.

Когда ставят на номер и выигрывают, то получают 35 ставок, т. е. с учетом возвращаемой поставленной суммы получают 36-кратную ставку. А так как общее число номеров — 37, то для того, чтобы игра была безобидной, следовало бы получать 37-кратную ставку, т. е. выигрыш должен был бы составить 36 ставок.

Таким образом, для банка математическое ожидание выигрыша составляет 1/37 сделанных ставок. Другими словами, каждый раз игрок теряет в среднем 1/37 своей ставки.

Это кажется незначительным — всего около 2,70%. Однако, если игра продолжается долго, влияние этих 2,70% существенно. Для большого числа партий стано-

[1] Французский математик (1717—1783).

вится применим закон, известный в теории вероятностей под названием *закона больших чисел.*

Если играют всего один раз, два раза или даже сто раз, то шанс на выигрыш составляет почти один из двух.

Если же играют десять тысяч раз, то остается лишь ничтожный шанс на выигрыш.

Стоит сделать одно важное замечание: шансы на проигрыш больше, когда ставят на номера, чем когда ставят на простые шансы. Действительно, преимущество банка составляет 1/37 при одиночных или групповых ставках на номера. Напротив, при ставке на простые шансы, если выпадает нуль, то ставки оказываются потерянными не полностью: теряют лишь половину ставки (или почти половину, ибо если играющий не забирает сразу половину поставленной суммы, то далее снова сказывается наличие нуля), так что преимущество банка составляет только 1/74 (или около 1,35%),— а это вдвое меньше, чем при ставке на номера.

Влияние преимущества банка на вероятность выигрыша для игрока можно строго оценить.

Когда ставят на простые шансы, то есть всегда лишь примерно один шанс из миллиона выиграть в серии из 120 000 партий.

Когда ставят на номера, то есть лишь один шанс из миллиона выиграть в серии из 30 000 партий.

Но 30 000 партий можно играть в течение двадцати лет, если в среднем играть по 30 раз в неделю.

Отсюда видно, каковы шансы на выигрыш (один шанс из миллиона или даже меньше) у игрока, который играет регулярно в течение долгого периода времени.

СТРАТЕГИИ ИГРЫ В РУЛЕТКУ

Разум со всей очевидностью подсказывает нам, что результат, выпавший в какой-то партии, не может оказывать ни малейшего влияния ни на предыдущие, ни на последующие результаты: шарик не имеет памяти! И тем не менее существует бессчетное множество систем, или стратегий, игры, придуманных игроками.

Различают два типа стратегий: те, которые исходят из предположения, что у шарика есть «память», и те, что построены на математическом анализе игры.

Стратегии, основанные на предположении о наличии у шарика памяти, опираются на разные принципы, которые зачастую противоречат друг другу, если рассматривать разные системы игры.

Некоторые рекомендуют игроку ставить на проигрыш (т. е., например, на черное, если перед этим выпало красное), а другие, напротив, предписывают ему делать ставку на выигрыш.

Если речь идет о серии из многих партий, то возможны многочисленные стратегии: серия (игрок много раз подряд ставит на красное); чередование (игрок ставит на красное — черное — красное — черное) или кружение (двигаться по кругу, ставя последовательно на красное — нечет — манк — пасс — чет — черное).

Иногда советуют увеличивать ставки в случае выигрыша и уменьшать их в случае проигрыша; иногда рекомендуют делать прямо противоположное.

Некая стратегия состоит из двух частей: **атаки,** когда принимают решение начать игру после того, как выпадет определенная комбинация, которая считается благоприятной, и **отхода**, где планируется окончание ставок либо в какой-то заранее выбранный момент, либо в зависимости от результатов предыдущих партий.

Наиболее простая из математических стратегий — это стратегия Д'Аламбера, о которой мы упоминали выше. Она состоит в следующем. Ставят 1 франк на красное. Если выпадает выигрыш, то серия закончена и следующий раз снова ставят 1 франк на красное.

Если же выпадает проигрыш, то в следующий раз ставят 2 франка на красное. Если выпадет красное, то выигрыш составит $2-1=1$ франк. Серия окончена, и следующий раз снова начинают ставить 1 франк на красное.

Если во второй раз снова выпал проигрыш, то в третий раз на красное ставят 4 франка и т. д. Каждый раз ставка удваивается, и так поступают до тех пор, пока не выпадет выигрыш. Если мы проиграем n раз подряд и выиграем на $(n+1)$-й раз, то итог наших выигрышей и проигрышей составит

$$-1-2-2^2-2^3-\dots-2^{n-1}+2^n=1,$$

т. е. мы снова выиграем 1 франк.

Эта стратегия оказалась бы беспроигрышной, если бы ставки не были ограничены и если бы игрок обладал достаточно большим капиталом.

Неудобство такой стратегии состоит в том, что здесь приходится оперировать большими суммами, тогда как окончательный выигрыш составляет всего лишь 1 франк.

Если, например, мы проиграем девять раз подряд, нам потребуется в следующий раз поставить 512 франков, чтобы отыграть 511 уже проигранных франков — и неизменный 1 франк выигрыша.

Более разумный вариант стратегии Д'Аламбера состоит в том, чтобы уменьшать однофранковые ставки в случае выигрыша и увеличивать их в случае проигрыша[1]. При такой стратегии для того, чтобы можно было уменьшить ставку в случае выигрыша в первый же раз, нужно «атаковать» суммой в 5 или 10 франков.

Анализ стратегии Д'Аламбера

Если бы игра была безобидной (честной), то провести математический анализ стратегии Д'Аламбера оказалось бы делом несложным.

В случае проигрыша ставка каждый раз удваивается. Но, поскольку максимальная ставка ограничена 1000 франков, мы не можем превзойти $2^9=512$ франков. Другими словами, если мы проиграем десять раз подряд, то серия закончена и мы должны снова ставить только 1 франк на красное.

Если бы игра была безобидной, то мы имели бы один шанс из 1024 проиграть десять раз подряд, что соответствовало бы проигрышу в $1+2+4+\ldots+256+512=$ $=1023$ франка. В среднем мы выиграли бы 1023 раза по 1 франку.

Если у кого-либо возникнут сомнения, то можно непосредственно проверить, что игра безобидна, поскольку выигрыши уравновешивают проигрыши.

Но реальная игра в рулетку отнюдь не безобидна. Если мы ставим на красное, то вероятность того, что десять раз подряд будет выпадать черное или нуль, оказывается равной не $(1/2)^{10}$, а $(75/148)^{10}=0{,}00112$, или приблизительно 1/895.

[1] 1 франк мы взяли просто для определенности. С тем же успехом мы могли бы говорить об одной ставке игрока, не фиксируя ее величину

На этом примере ясно виден итоговый эффект «маленького» преимущества банка в 1/74. Вероятность проигрыша вместо 1/1024, которой она равнялась бы при безобидной игре, возрастет до 1/895.

Вероятность не проиграть в серии из десяти партий, таким образом, равна

$$1-\left(\frac{75}{148}\right)^{10}$$

Вероятность не проиграть в определенном числе последовательных серий представлена в следующей таблице:

Число сыгранных серий	10	100	500	1000	2000
Вероятность (%) не проиграть ни разу (приближенно)	98,9	89,4	57,2	32,7	10,7

Напимним, что в этой таблице под словом «серия» понимается последовательность партий, которую игрок закончил либо с выигрышем в 1 франк, либо с проигрышем в 1023 франка.

В одной серии вероятности составляют

$1-\left(\frac{75}{148}\right)^{10}$ — для выигрыша в 1 франк,

$\left(\frac{75}{148}\right)^{10}$ — для проигрыша в 1023 франка.

Следовательно, ожидаемый выигрыш игрока в одной серии составляет

$$1-\left(\frac{75}{148}\right)^{10}-1023\cdot\left(\frac{75}{148}\right)^{10}=-0{,}14 \text{ франка.}$$

Его средняя ставка за одну серию равна

$$\frac{73}{148}+3\cdot\frac{75}{148}\cdot\frac{73}{148}+7\cdot\left(\frac{75}{148}\right)^{2}\cdot\frac{73}{148}+15\cdot\left(\frac{75}{148}\right)^{3}\cdot\frac{73}{148}+$$

$$+31\cdot\left(\frac{75}{148}\right)^{4}\cdot\frac{73}{148}+63\cdot\left(\frac{75}{148}\right)^{5}\cdot\frac{73}{148}+127\cdot\left(\frac{75}{148}\right)^{6}\cdot\frac{73}{148}+$$

$$+255\cdot\left(\frac{75}{148}\right)^7\cdot\frac{73}{148}+511\cdot\left(\frac{75}{148}\right)^8\cdot\frac{73}{148}+$$

$$+1023\cdot\left(\frac{75}{148}\right)^9=10{,}63 \text{ франка.}$$

Можно проверить, что средний проигрыш за одну серию (в нашем случае 0,14 франка) равен 1/74 средней ставки (в нашем случае 10,63 франка).

Стосерийная стратегия

Анализируя приведенную выше таблицу, мы приходим к выводу, что

играя только десять серий, мы имеем шанс на выигрыш в 98,9%.

Но десять серий — это слишком мало, чтобы игра имела смысл;

играя 500 серий, мы сильно повышаем риск проигрыша: 43 шанса из 100.

Поэтому рассмотрим случай, когда игрок заранее решает сыграть 100 *серий подряд*, а затем остановиться.

Шансы на выигрыш составляют $\approx 89{,}5$ из 100, или примерно 9 шансов из 10. Если он выиграет, то только 100 франков. Напротив, если он проиграет один (и только один) раз, то потеряет $1023-99=924$ франка.

Если игрок следует этой стосерийной стратегии, то у него

ожидаемый выигрыш равен $\approx 89{,}4$ франка;

ожидаемый проигрыш равен $\approx 103{,}8$ франка.

Разность этих величин, равная 14,4 франка, составляет 1/74 от суммарной средней ставки игрока за 100 серий, в нашем случае от 1063 франков.

Влияние преимущества банка при большом числе партий

Дополним таблицу, указывающую вероятность (в %) не проиграть ни разу в данном числе сыгранных серий.

Поскольку игрок рискует потерять 1023 франка за одну серию, то, для того чтобы выиграть, он должен проиграть не более одного раза в 1024 сериях.

Вероятность (в %) не проиграть в 1024 сериях примерно равна

36,8% в случае безобидной игры[1];
31,8% в случае преимущества банка в 1/74 ставок.

Таким образом, в 1000 серий у игрока шансы на выигрыш уменьшаются на 5% из-за того, что игра не безобидная.

Влияние выбора игроком номеров или простых шансов на проигрыши игрока

Анализируя стратегию Д'Аламбера, мы видели, что ожидаемый проигрыш игрока за одну серию составляет

$$1 - 1024 \cdot \left(\frac{75}{148}\right)^{10} \approx -0{,}14 \text{ франка}$$

при начальной ставке в 1 франк на простой шанс.

Если игрок ставит на номер, то проигрыш становится равным

$$1 - 1024 \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^{10} \approx -0{,}31 \text{ франка.}$$

Таким образом, ожидаемый проигрыш игрока возрастает более чем в два раза.

Этот пример далек от реальности, поскольку ставить на номера, следуя данной стратегии, нельзя. Наш теоретический подсчет, однако, еще раз показывает, какое важное значение имеет для проигрыша игроков преимущество банка.

---

[1] Вероятность не проиграть не равна 1/2 даже для безобидной игры. На самом деле есть три исхода: или выигрывает игрок, или выигрывает банк; или игрок проигрывает один раз из 1024 и в итоге остается не в проигрыше и не в выигрыше.

Послесловие редактора перевода

Итак, читатель, вы познакомились еще с одной книгой по «развлекательной математике», составленной французским инженером Жан-Клодом Байифом — выпускником прославленной парижской Политехнической школы, одного из самых престижных высших учебных заведений Франции, в котором некогда преподавали великие математики Гаспар Монж (1746—1818) и Жозеф Луи Лагранж (1736—1813), Огюстен Коши (1789—1857) и Жан Батист Фурье (1768—1830). Политехническая школа традиционно прививает своим воспитанникам вкус к трудным и красивым задачам, и в этом отношении автор настоящего сборника оказался достойным своей альма-матер. То обстоятельство, что автором книги является не профессиональный математик, а инженер, тоже наложило на нее известный отпечаток — но об этом мы скажем несколько позже.

Структура книги «Логические задачи» не совсем обычна. Через всю книгу проходят две «магистральные темы»: *задачи на разрезание и складывание фигур* (главы 2, 6 и 10) и *задачи на обнаружение фальшивой* (отличающейся по весу от остальных) *монеты с помощью взвешиваний* на чашечных весах без гирь (главы 4, 8 и 11). Названные главы даже по внешней форме несколько отличаются от остальных — хотя бы тем, что здесь, как правило, отдельные задачи просто нумеруются, тогда как в других разделах книги каждая задача имеет свой заголовок. Более существенное различие состоит в том, что задачи каждого из этих циклов в известной степени взаимосвязаны и решение очередной задачи вполне может опираться на предшествующие. Другие разделы книги (главы 1, 3, 5, 9 и 12) более обычны для сборников математических развлечений и содержат просто наборы забавных совершенно не зависимых одна от другой задач разного уровня трудности, хотя и здесь можно усмотреть определенные общие идеи, в известной степени объединяющие эти разнородные задачи. Наконец, главы 7 и 13 вообще не содержат задач — они посвящены обсуждению двух важных тем, связанных с *теорией вероятностей* и с *математической логикой.* Приложения I—III к книге играют в основном «служебную» роль, хотя, возможно, для кого-то представят самостоятельный интерес.

В принятом делении наук на общественные, естественные и технические математика занимает особое место. Объектом исследования *общественных наук* (к ним относятся история, социология, экономика, филология, искусствоведение, юриспруденция и т. д.) служит человеческое общество; *естественные науки* (физика, химия, астрономия, биология, геология и т. д.) изучают реальный физический мир, который нас окружает. *Математика* же изучает абстрактные схемы, конструкции, рожденные жизнью, но затем в определенной степени утратившие свою связь с реальностью. «Линия есть длина без ширины»,— декларирует Евклид на первой же странице своих прославленных «Начал», предлагая далее изучать этот призрачный, далекий от всякой реальности образ.

Быть может, именно с этой уникальностью места, занимаемого математикой во всей системе наук, связано ее поразительное разнообразие, наличие внутри нее самых разных подходов и точек зрения, мирно — а иногда и не совсем мирно — уживающихся в этой обширной области знаний. Здесь я имею в виду отнюдь не существование целого ряда автономных математических дисциплин: алгебры и геометрии, математического анализа и теории вероятностей — причем сегодня каждое из названных четырех направлений распалось на множество различных течений, многие из которых тоже получили статут самостоятельных наук. Нет, разные подходы к математике в целом определяют гораздо более глубокие **общие** моменты.

Существенным вопросом, способствовавшим возникновению разных точек зрения на существо математической науки, безусловно, явился вопрос о взаимоотношении математики и реального мира. Что такое математика? Есть ли это наука об определенной категории свойств реально существующих объектов или она целиком «погружена в себя» и с внешним миром не связана? Рассматриваем ли мы математику как *естественнонаучную дисциплину* — именно так относились к ней во всех культурных формациях, предшествующих Древней Греции,— или, подобно Пифагору и Платону, мыслим ее как чистую *логику*? На самом деле, разумеется, ни строгой границы, ни каких бы то ни было противоречий здесь нет: происхождение математических понятий тесно связано со стремлением разобраться в строении окружающего нас мира, однако наибольшую полноту возможностей для использования математики в жизни доставляет именно намеренный отрыв ее от реально существующих объектов. В рамках настоящей книги эти две ипостаси математики просматриваются в забавных сюжетах задач, заимствованных из реальной — а порою даже из сказочной — жизни, и в строгих методах решения этих задач, сохраняющих лишь «выжимку» рассказанных историй, записываемую в виде формальных математических схем (скажем, в виде определенных уравнений или систем уравнений).

Достаточно глубоким является и принципиальное различие между *алгебраическими* и *геометрическими* подходами к отдельным проблемам, связанное с присущими человеческому мышлению способностями как к анализу (алгебра), так и синтезу (геометрия). Сущность этого различия становится нам ясной только сегодня в связи с сенсационными открытиями в области высшей нервной деятельности человека, в частности в области разграничения функций левого («аналитического», или «алгебраического») и правого («синтетического», или «геометрического») полушарий головного мозга[1]. Обращаясь к настоящей книге, укажем, что одна из двух ее сквозных тем — о разрезании фигур — представляет здесь *геометрию,* тогда как тема о взвешивании монет имеет последовательно *алгебраический* (алгоритмический, логический) характер. Возможно, что и традиционное противопоставление «мате-

---

[1] Этой тематике посвящены, в частности, исследования американского психолого Роджера Сперри, отмеченные Нобелевской премией по биологии и медицине за 1981 г.

матики непрерывного», представленной в первую очередь дифференциальным и интегральным исчислением Ньютона и Лейбница и выросшими отсюда дисциплинами (дифференциальные уравнения, вариационное исчисление или функциональный анализ), и «математики дискретного» в каком-то смысле тоже связано с указанным различием между геометрией и алгеброй, между «правомозговым» и «левомозговым» мышлением. В свое время дискретная математика была сильно потеснена математическим анализом (о чем свидетельствует, например, ныне уже безусловно неуместный термин «высшая математика» в применении к дифференциальному и интегральному исчислению), но сегодня — в значительной степени в связи с созданием ЭВМ — она снова занимает подобающее ей важное место. И настоящая книга, в соответствии с тенденциями последних десятилетий, почти целиком обращена к «дискретной математике» сегодняшнего дня.

Принципиальным и не простым является противостояние «чистой» и «прикладной» математики: ведь прикладная математика базируется отнюдь не только на отточенной логике дедуктивных выводов — у нее есть своя «логика», свои «правила игры»[1]. Так, например, столь «примитивный» метод решения математических проблем, как *метод перебора*, не пользуется высокой репутацией в области чистой математики — однако во многих прикладных вопросах он является одним из основных. В связи с этим заслуживает внимания широта использования этого метода в решении многих задач настоящей книги — это обстоятельство, как нам кажется, выдает в авторе книги специалиста по *прикладной математике*, для которого перебор вариантов (машинный или осуществляемый вручную) является весьма привычной процедурой.

Обращаясь снова к «магистральным» темам настоящей книги, укажем, что тема о разрезании и складывании фигур[2] тесно связана с достаточно глубокими

[1] По поводу специфических черт прикладной математики см.: Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко А. Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов.— Киев: Наукова думка, 1976.

[2] Этой теме, кстати сказать, были специально посвящены две книги,выпущенные издательством «Мир»: Голомб С. В. Полимино.— М.: Мир, 1975; Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание.— М.: Мир, 1977.

и трудными вопросами чисто теоретического характера[1], что и определяет «научную актуальность» этой, казалось бы, достаточно простой темы. Что же касается вопроса об обнаружении фальшивой монеты с помощью взвешиваний, то для читателя может явиться неожиданностью резонанс, который получила в последнее время эта явно шуточная проблематика: полная библиография книг, в которых затронуты задачи такого рода, и статей, специально им посвященных, насчитывает ныне многие десятки названий, причем статьи на эту тему систематически печатаются в серьезных научных журналах, посвященных, скажем, теории информации или комбинаторному анализу. Причиной этого является тесная связь «задачи о монетах» с весьма серьезными проблемами современной прикладной математики[2].

Наконец, главы 7 и 13 книги «Логические задачи» посвящены обсуждению важных тем из «чистой» математики, но трактуемых, в основном, с точки зрения прикладника[3]. При этом читателя не должно смущать, что «прикладной аспект» гл. 7, посвященной теории вероятностей, в значительной степени концентрируется вокруг столь малопочтенного занятия, как игра в рулетку. Проблематика, связанная с азартными играми, в значительной степени способствовала созданию теории вероятностей; на, казалось бы, малосерьезном при-

---

[1] См. послесловие редактора упомянутой выше книги Линдгрена и указанную в конце книги Линдгрена литературу, в частности книгу: Болтянский В. Г Третья проблема Гильберта.— М.: Наука, 1977

[2] Не имея возможности остановиться здесь на этом подробнее, мы адресуем интересующихся к §2 гл. III рассчитанной на достаточно широкого читателя книги: Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация.— М.: Наука, 1973, где изложен совсем иной метод решения подобных задач, и особенно к §3 гл. III и §1 гл. IV той же книги, поясняющим связь этих задач с *теорией кодирования* и с другими важными прикладными проблемами, например с так называемой *теорией вопросников.*

[3] Последнее обусловило и, быть может, недостаточно развернутый анализ так называемого *парадокса Бертрана* о геометрических вероятностях, тесно связанного с аксиоматическим описанием теории вероятностей и относящегося к почти обойденной вниманием в этой книге «математике непрерывного». По этому поводу читателя можно отослать к неустаревающей книге: Борель Э. Случай.— М.— Птр.: ГИЗ, 1923, а также, скажем: Яглом А. М., Яглом И. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении.— М.: Гостехиздат, 1954, с. 47—49; Яглом И. М. Булева структура и ее модели.— М.: Сов. радио, 1980, с. 174—175 и 179—180.

мере игры в рулетку удачно иллюстрируются некоторые достаточно важные общие понятия, такие, как понятие *среднего значения (математического ожидания)* случайной величины или представление о «безобидной» игре. Что же касается затронутой в книге темы об «оптимальной стратегии» игры в рулетку, то от нее легко перекинуть мостик к важному понятию «оптимальной стратегии» любой (индивидуальной или коалиционной) игры, занимающему столь важное место в математических методах экономической науки и во многих других серьезных проблемах прикладной математики. Между прочим, описанные в Приложении III и мало у нас известные правила игры в рулетку облегчат читателю понимание некоторых шедевров отечественной словесности, скажем, замечательной повести Ф. М. Достоевского «Игрок». Наконец, обсужденный в гл. 13 вопрос о логических парадоксах, с одной стороны, тесно связан с глубокими вопросами оснований математики, с другой же стороны, он упирается в столь важную ныне проблематику (в частности, в связи с актуальным вопросом о диалоге «человек — машина») точной и однозначной расшифровываемости человеческой или искусственной речи.

В противоположность упомянутой дифференциации внутри математической науки противопоставление *математики занимательной — математике серьезной* не следует считать сколько-нибудь принципиальным. Математическая наука издавна черпала многие постановки вопросов и важные новые понятия из области математических развлечений; в качестве примеров здесь можно указать, скажем, на зарождение *теории графов* из эйлеровской задачи о кёнигсбергских мостах[1] или связь принадлежащей тому же Эйлеру задачи о 36 офицерах с современной *теорией конечных плоскостей*[2]. Ближе к содержанию настоящей книги лежит возникновение всей современной *теории чисел* из достаточно простых задач, послуживших, например, источником глубокой темы о так называемых *диофантовых уравнениях,* решения которых должны обязательно выражаться целыми числами (примеры задач, сводящихся

[1] См., например: Оре О. Графы и их применение.— М.: Мир, 1965, с. 32—34.

[2] Беве Л. Мини-геометрия.— Квант, 1976, № 6, с. 2—12.

к уравнениям такого рода, вы без труда отыщете и в настоящей книге), или зарождение *теории вероятностей* из проблематики, связанной с игрой в кости или карты. Наконец, как мы уже отмечали, забавные задачи об отыскании фальшивых монет, которым отведено значительное место в этой книге, сыграли важную роль в создании *теории кодирования* и в осмыслении ряда проблем *теории информации.*

Вместе с тем авторы сборников математических развлечений — и эта книга отнюдь не составляет исключения — весьма охотно использовали серьезные математические теории для создания новых задач и головоломок. Так что «занимательная» и «серьезная» математика — это одна наука, и, обдумывая забавные проблемы из книг по занимательной математике или решая собранные в этих книгах задачи, вы не только получаете удовольствие, но и приобретаете весьма полезные знания и навыки. И мы хотим надеяться, что книга Ж.-К. Байифа «Логические задачи» доставит читателю немало приятных мгновений, и уверены, что она принесет ему пользу.

И. М. Яглом

СОДЕРЖАНИЕ

Жан-Клод Байиф

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Научный редактор А Н. Кондрашова
Мл научный редактор М. А. Харузина
Художник Н Н Дронова
Художественный редактор Л. Е Безрученков
Технический редактор Н Д. Толстякова
Корректор Н. Н. Яковлева

ИБ № 3413

Сдано на фотонабор 06.05.82
Подписано к печати 21.12.82.
Формат $84 \times 108^1/_{32}$.
Бумага типографская № 2. Объем 2,75 бум л
Гарнитура литературная. Печать высокая
Усл. печ. л. 9,24 Усл. кр.-отт 9,53.
Уч.-изд. л. 8,02. Изд. № 12/2105.
Тираж 50 000 экз. Зак. 217. Цена 45 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
129820, Москва, И-110, ГСП
1-й Рижский пер., 2.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.